9. Grupy a podgrupy

Grupy

1. Následující zčásti vyplněné tabulky zadávají nějakou binární grupovou operaci $\cdot$, tj. v buňce příslušné řádku x a sloupci y se nachází $x \cdot y$. Doplňte zbytek tabulky.

(a)

	a	b
a		b
b		

(b)

	a	b	c	d
a				b
b	d	c		
c				
d				

[(a)

	a	b
a	a	b
b	b	a

, (b)

	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

]

2. Rozhodněte, zda existuje unární operace $'$ a prvek e takové, aby následující čtveřice byly grupami:
   (a) $(\mathbb{Q}^+, \cdot, ', e)$ (b) $(\mathbb{Z}, -, ', e)$ (c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *, ', e)$, kde $a * b = |a \cdot b|$.
   [(a)ano (b) ne, mínus není asociativní, (c) ne, pro $a < 0$ by bylo $a = a * e = |a \cdot e| \geq 0$]

Řád prvku v grupě

3. Jaký řád mají následující prvky v daných grupách?
   (a) 4 a 15 v $\mathbb{Z}_{75}$ [75 a 5]
   (b) 7 v $\mathbb{Z}_{20}^*$ [4]
   (c) 4 a 15 v $\mathbb{Z}$ [∞ a ∞]
   (d) $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9)$ v $\mathbb{S}_9$ [12]
   (e) $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9)$ v $\mathbb{A}_{2020}$ [12]
   (f) rotace o 144° v $\mathbf{D}_{10}$ [5]
   (g) prvek k v kvaternionové grupě $\mathbf{Q}_8$ [4]
   (h) matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v $\mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$ [3, 6, ∞, 8]
   (i) dvojice $\big((1\,2\,3)(4\,5), (1\,2\,3\,4)\big)$ v direktním součinu $\mathbb{S}_5 \times \mathbb{S}_4$. [12]

4. Najděte nejmenší podgrupu $\mathbb{S}_5$, která obsahuje prvek $\pi = (1\,2\,3\,4\,5)$, tj. $\langle \pi \rangle_{\mathbb{S}_5}$. Kolik má prvků? [cyklická pětiprvková cyklická grupa generovaná prvkem $\pi = \{id, \pi, \pi^2 = (1\,3\,5\,2\,4), \pi^3 = (1\,4\,2\,5\,3), \pi^4 = (1\,5\,4\,3\,2)\}$]

Podgrupy a Lagrangeova věta

5. Určete, v kterých z následujících grup tvoří sudá čísla podgrupu: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_{15}^*$, $\mathbb{Z}_{16}^*$.
   [$\mathbb{Z}$ ano, $\mathbb{Z}_{15}$ ne, $\mathbb{Z}_{16}$ ano, $\mathbb{Z}_{15}^*$ ne, $\mathbb{Z}_{16}^*$ ne]

6. Rozhodněte, zda (a) $\{\pi \in A_4 : \pi^2 = 1\}$, (b) $\{\pi \in A_4 : \pi^3 = 1\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{A}_4$. Vyřešte analogickou úlohu pro grupu $\mathbb{S}_4$. [(a) v A_4 ano, v $\mathbb{S}_4$ ne, (b) v A_4 ne, v $\mathbb{S}_4$ ne]

7. Ukažte, že platí:
   (a) $\langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$
   (b) $\langle (1,0),(0,1) \rangle_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
   (c) $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathrm{NSD}(a,b)\mathbb{Z}$
   (d) $\mathbb{S}_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle$
   (e) $\mathbb{A}_n = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$.

8. Dokažte, že $D_{2n} = \langle \rho, \sigma \rangle$, kde ρ je rotace o úhel $2\pi/n$ a σ je libovolná reflexe.
   [Stačí se podívat, co dostaneme, když okonjugujeme reflexi rotací, tj. na $\rho\sigma\rho^{-1}$.]

9. Rozhodněte, zda existuje v grupě $\mathbb{S}_{17}$ prvek řádu
   (a) 71 [ne, Lagrange]
   (b) 72 [ano, např. $(1\ldots8)(9\ldots17)$]
   (c) 80. [ne, pro disjunktní cykly délek n_i s $\mathrm{NSN}(n_i \mid i \leq k) = 80$ je $\sum n_i > 17$]

10. Buď G grupa řádu 60, $H \leq G$ řádu 5 a $K \leq G$ buď v G indexu 5. Je $H \cap K$ komutativní?
    [ano, podle Lagrangeovy věty jde o jednoprvkovou grupu]

11. Uvažujme grupu $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$. Ukažte, že:
    (a) zde mají každé dvě netriviální podgrupy netriviální průnik.
    (b) ji nelze nagenerovat jedním prvkem (dokonce ani žádnou konečnou podmnožinou).