CVIČENÍ Z ÚVODU DO TEORIE GRUP

Opakování:

(1) Popište až na izomorfismus všechny grupy řádu (a) 51, (b) 39.
(2) Kolik existuje homomorfismů nekomutativní grupy řádu 21 do D_{14}?

9. Grupy řádu 8 a 12

9.1. **Komutativní grupy.**

9.1. Popište (až na izomorfismus) všechny abelovské grupy řádu (a) 8, (b) 12, (c) 96.

9.2. Popište (až na izomorfismus) všechny abelovské grupy $\mathcal{G}$ řádu 32, pro n (něž) (a) $\sigma_1(\mathcal{G}) \cong \mathbb{Z}_2$ (b) (b) $\sigma_1(\mathcal{G}) \cong \mathbb{Z}_2^2$, (c) $\sigma_1(\mathcal{G}) \cong \mathbb{Z}_2^3$.

9.2. **Neabelovské grupy řádu 8.** Připomeňme, že definujme-li na množině $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ operaci násobení vztahy

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$$

a dále pravidly $(-1)x = x(-1) = -x$, $xy = -(yx)$, $(-x)y = x(-y) = -(yx)$ pro všechna $x, y \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$, kde $-$ mění znaménko, tvoří $\mathcal{Q} = (Q, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupu kvaternionů.

9.3. Nechť $\mathcal{G}$ je neabelovská grupa řádu 8. Dokažte, že

(a) obsahuje prvek řádu 4,
(b) jestliže $g \in G$ řádu 4 a $h \in G \setminus \langle h \rangle$ je řádu 2, pak je $\mathcal{G}$ izomorfní grupě D_8,
(c) jestliže $g \in G$ řádu 4 a všechny prvky $G \setminus \langle h \rangle$ jsou řádu 4, pak $hgh^{-1} = g^3$ a $\mathcal{G}$ izomorfní grupě $\mathcal{Q}$,
(d) $\mathcal{G}$ je izomorfní buď grupě D_8 nebo grupě $\mathcal{Q}$.

Date: 1. prosince 2020.