Otázky ke zkoušce z Křivek a funkčních těles

1. Test

1.1. **Algebry nad tělesem.**

1. Jsou-li $A \leq B$ podprostory vektorového prostoru V, v jakém vztahu inkluze jsou množiny V^*, A^o a B^o?

2. Je-li R obor s podílovým tělesem K, jaký je vztah mezi lineární nezávislostí nad R a nad K?

1.2. **Algebraická funkční tělesa.**

3. Definujte algebraické funkční těleso.

4. Uveďte aspoň dva neizomorfní příklady algebraických funkčních těles nad tělesem $\mathbb{F}_3$.

5. Definujte těleso konstant $\tilde{K}$ AFF L nad K. V jakém vztahu je $\tilde{K}$ a K?

6. Charakterizujte transcendentní prvky algebraického funkčního tělesa pomocí stupně rozšíření.

1.3. **Valuační okruhy.**

7. Definujte valuační okruh a uveďte nějaký jeho příklad.

8. Popište vztah mezi maximalitou podokruhu tělesa a podmínkou na valuační okruhu.

9. Popište prvky noetherovského lokálního oboru s hlavním maximálním ideálem

1.4. **Diskrétní valuační okruhy.**

10. Co je diskrétní valuační okruh? Uveďte nějaký příklad.

11. Charakterizujte diskrétní valuační okruhy pomocí podmínek na ideály.

12. Jak vypadají všechny (normalizované) diskrétní valuace na AFF $K(x)$?

13. Napište příklad normalizované diskrétní valuace na tělese racionálních funkcí $K(x)$.

14. Definujte pojem místa AFF a jeho stupně.

15. Definujte pojem diskrétní valuace.

16. V jakém vztahu jsou místa a jimi určené diskrétní valuační okruhy?

17. V jakém vztahu jsou místa a jimi určené diskrétní valuace?

1.5. **Weierstrassovy rovnice.**

18. Co je Weierstrassův polynom?

19. Nechť $w(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ je WEP. Jsou $w(x, y)$ a $w(x, 1 - y)$ $\mathbb{C}$-ekvivalentní? Vysvětlete.

20. Co znamená, že jsou dva WEP K-ekvivalentní?

21. Napište jednu ekvivalentní podmínku pro K-ekvivalenci Weierstrassových polynomů.

22. Jsou $\mathbb{F}_3$-ekvivalentní polynomy $y^2 - x^3$ a $y^2 - (x^3 + 1) \in \mathbb{F}_3[x, y]$? Stručně vysvětlete.

23. Jsou $\mathbb{F}_5$-ekvivalentní polynomy $y^2 - x^3$ a $y^2 - (x^3 + 1) \in \mathbb{F}_5[x, y]$? Stručně vysvětlete.

1.6. **Singularity.**

Definujte singularity a hladké body a řekněte, jak je transformují afinní automorfismy. Zformulujte a dokažte charakterizaci hladkých WEP v krátkém tvaru.

24. Definujte pojem tečny a singulárního a hladkého body polynomu.

25. Definujte pojem singulárního a hladkého polynomu a variety.

26. Nejděte všechny singulární body Weierstrassova polynomu $y^2 - (x-2)^3$ nad $\mathbb{R}$.

1.7. **Souřadnicové okruhy.**

27. Popište všechny prvoideály oboru $K[x, y]$.

28. Co je funkční těleso $K(C)$ afinní křivky C? Která funkční těleso křivky jsou AFF?

29. Co je absolutně ireducibilní polynom? Které WEP jsou absolutně ireducibilní polynomy?

30. Popište bez použití pojmu těleso konstant všechny algebraické prvky AFF L nad K pro WEP.

31. Najdete prvoideály $0 \neq P \subsetneq Q$ okruhu $\mathbb{C}[x, y]$ splňující $P \subseteq (x^2 + y^2) \subseteq Q$.

32. Najdete nějaké prvoideály $0 \neq P \subsetneq Q$ okruhu $\mathbb{F}_3[x, y]$.

33. Co znamená, že je AFF L je nad K dané rovnicí $w(\alpha, \beta) = 0$?

1.8. **Místa určená dvojicí.**

34. Pro $w = yg(x, y) + h(x) + y \in K[x, y]$, kde $h \in K[x]$, $g \in K[x, y]$, $m := \mathrm{mult}(h) \geq 2$, $\mathrm{mult}(g) \geq 1$, a L je AFF nad K dané $w(\alpha, \beta) = 0$ zformulujte tvrzení popisující místa obsahující α a β a odpovídající diskrétní valuaci.

35. Pro AFF dané $w(\alpha, \beta) = 0$ a bod $(\gamma_1, \gamma_2) \in V_w(K)$ zformulujte tvrzení o valuaci prvku $l_1\alpha + l_2\beta + l_0$ v místě obsahujícím $\alpha - \gamma_1$ a $\beta - \gamma_2$.

36. Pro AFF dané $w(\alpha, \beta) = 0$ a bod $(\gamma_1, \gamma_2) \in V_w(K)$ zformulujte tvrzení, které stanoví přesnou hodnotu $\nu_P(\beta - \lambda\alpha + \mu)$ v místě P obsahujícím $\alpha - \gamma_1$ a $\beta - \gamma_2$.

1.9. **Lokalizace v souřadnicovém okruhu.**

37. Co jsou množiny P_γ a $\mathcal{O}_\gamma$ pro bod γ?

38. Pro které body γ je okruh $\mathcal{O}_\gamma$ valuační?

39. Pro které body γ a místa P okruhy $\mathcal{O}_\gamma$ a $\mathcal{O}_P$ valuační?

40. Popište místa AFF nad WEP odpovídající hladkým bodům.

1.10. **Slabá aproximační věta a její důsledky.**

41. Zformulujte slabou aproximační větu.

42. Uveďte příklad AFF, pro nějž je $\mathbb{P}_{L/K}$ nekonečné a $\mathbb{P}^{(1)}_{L/K}$ konečné.

43. Popište všechna místa stupně 1 nad hladkým WEP?

1.11. **Divizory.**

44. Definujte grupu divizorů.

45. Co je hlavní divizor?

46. Spočítejte hlavní divizor (π) AFF nad tělesem $\mathbb{R}$.

47. Spočítejte negativní část hlavního divizoru $(x)_-$ AFF $K(x)$ nad tělesem K.

48. Co je Riemannův-Rochův prostor $\mathcal{L}(A)$ divizoru A? Určete $\mathcal{L}(\underline{0})$ AFF nad tělesem $\mathbb{C}$.

49. Zformulujte tvrzení o stupni pozitivní a negativní části hlavního divizoru.

50. Jaký je stupeň hlavního divizoru?

51. Vyslovte Riemannovu větu. a vysvětlete, co je to rod.

52. Definujte pojem rodu.

53. Definujte pojem adele.

54. Definujte index specializace. Které divizory jsou speciální?

55. Pro které divizory stupně nula platí, že $l(A) = 1$? Co hodnota $l(A)$ udává?

56. Vyslovte Silnou aproximační větu

1.12. **Weilovy diferenciály.**

57. Co je Weilův diferenciál?

58. Co je kanonický divizor?

59. Charakterizujte dimenzi vektorového prostoru Weilových diferenciálů $\Omega_{L/K}$

60. Charakterizujte dimenzi vektorového prostoru Weilových diferenciálů $\Omega_{L/K}(A)$ pro divizor A.

61. Zformulujte Riemannovu-Rochovu větu.

62. Zformulujte Hlavní důsledek Riemannovy-Rochovy věty(o vztahu dimeze Riemannových-Rochových prostorů a stupňů divizorů).

63. Určete $l(W)$, $\deg(W)$ a $i(W)$ pro kanonický divizor.

64. Uveďte příklad AFF rodu (genu) 0.

1.13. **Eliptické funkční těleso.**

65. Co je eliptické funkční těleso?

66. Uveďte příklad eliptického funkčního tělesa.

67. Charakterizujte AFF rodu 0.

68. Charakterizujte všechna eliptická funkční tělesa nad WEP w.

1.14. **Asociativní zákon.**

69. Popište grupovou strukturu na hladké křivce dané WEP (ne nutně pomocí afinních vzorečků).

70. Definujte Picardovu grupu $P^0(L/K)$ AFF L nad K.

1.15. **Projektivní křivky.**

71. Definujte tělesa $K(\mathbb{P}^n)$ a $K(V_F)$ pro $F \in K[X_0, X_1, X_2]$.

72. Vyslovte tvrzení o vztahu mezi AFF danými afinní a projektivní křivkou.

73. Popište všechny normalizované diskrétní valuace na $K(\mathbb{P}^n)$ pomocí homogenních polynomů.

74. Popište pomocí homogenních polynomů všechna místa stupně jedna AFF $K(\mathbb{P}^n)$.

2. Typy početních úloh

1. Pro P místo AFF L nad $\mathbb{Q}$ a $a \in L$ splňující $a \in P^4 \setminus P^5$ určete hodnoty $\nu_P(a)$, $\nu_P(a^{-1}+3)$ $\nu_P(a^2+3a^3)$.

2. Pro Weierstrassův polynom $w = y^2-(x^3+x^2+1) \in \mathbb{F}_5[x,y]$ najděte $\mathbb{F}_5$-ekvivalentní krátký Weierstrassův polynom.

3. Rozhodněte, zda je Weierstrassův polynom $y^2 - yx + (x^3+2) \in \mathbb{F}_5[x,y]$ hladký.

4. Najděte všechny singularity Weierstrassova polynomu $y^2 + y(2x+1) - (x^3+2x^2+2x) \in \mathbb{F}_3[x,y]$.

5. Najděte všechna místa AFF $\mathbb{R}(x)$ nad $\mathbb{R}$ obsahující prvek x^3-1 a místo Q, pro něž $\nu_Q(x^3-1) < 0$.

6. Pro WEP $w = y^2 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x,y]$ a L AFF nad $\mathbb{F}_2$ určené rovností $w(\alpha,\beta) = 0$, najděte nějaké $a \in L$, pro něž $a, a^{-1} \notin \mathcal{O}_{(1,1)}$.

7. Popište hlavní divizor $(\alpha - \beta - 3)$ AFF L nad tělesem $\mathbb{Q}$ daném rovností $f(\alpha,\beta) = 0$, víte-li, že f je hladký WEP a neexistuje žádné $\gamma \in V_f(\mathbb{Q})$ splňující $l(\gamma) = f(\gamma) = 0$ pro $l(x,y) = x - y - 3$.

8. Nechť w je hladký WEP a Lje AFF nad $\mathbb{F}_{32}$ dané rovností $w(\alpha,\beta) = 0$. Spočítejte $\deg(\alpha\beta)$, $\deg(\alpha\beta)_+$, a $\deg(\alpha^{-1})_-$.

9. Je-li $f = y^2 - (x^3 - x + 1) \in \mathbb{C}[x,y]$ a $A = 1P_{(1,1)} + 3P_{(0,1)} + 5P_{(-1,1)} - 8P_\infty$, vysvětlete, proč je A dobře definovaný divizor a spočtěte $\deg(A)$. Je A hlavní?

10. Je-li $f = y^2 - x^3 - 3x + 2 \in \mathbb{F}_5[x,y]$, ověřte, že je AFF $\mathbb{F}_5(V_f)$ eliptické a spočítejte dimenzi Riemannova-Rochova prostoru $l((2) + \sum_{\gamma \in V_f(\mathbb{F}_5)} 1P_\gamma)$.

11. Najděte všechny singularity $f = y^2 + y - x^3 + x^2 - x + 1 \in \mathbb{F}_3[x,y]$ a spočítejte rod AFF nad $\mathbb{F}_3$ daného rovností $f(\alpha,\beta) = 0$.

12. Pro $f = y^2 + 4x^3 + x^2 + 3 \in \mathbb{F}_5[x,y]$ spočítejte rod AFF nad $\mathbb{F}_5$ daného rovností $f(\alpha,\beta) = 0$.

13. Je-li $w = y^2 - x^3 \in \mathbb{F}_5[x,y]$, popište $\mathbb{F}_5$-isomorfizmus těles $\mathbb{F}_5(z) \to \mathbb{F}_5(V_f)$.

14. Pro $f = y^2 - (x^3 + x + 1) \in \mathbb{F}_3[x,y]$ ukažte, že je AFF $\mathbb{F}_3(V_f)$ eliptické a popište strukturu grupy $E(\mathbb{F}_3)$ danou na křivce $V_f(\mathbb{F}_3)$. Je $E(\mathbb{F}_3)$ cyklická?

3. Teoretické otázky, důkazy

3.2. **Algebraická funkční tělesa.**

1. Vyslovte a dokažte charakterizaci transcendentních prvků algebraického funkčního tělesa pomocí stupně rozšíření a kořene polynomu.

Odpovídající tvrzení: 2.7

3.3. **Valuační okruhy.**

2. Popište prvky noetherovského lokálního oboru s hlavním maximálním ideálem a vyslovte tvrzení o existenci valuačních (nad)okruhů. Svá tvrzení dokažte.

Odpovídající tvrzení: 3.2, 3.3, 3.6

3.4. **Diskrétní valuační okruhy.**

3. Charakterizujte diskrétní valuační okruhy pomocí podmínek na ideály a popište všechny (normalizované) diskrétní valuace na AFF $K(x)$. Svá tvrzení dokažte.

Odpovídající tvrzení: 4.5, 4.9

4. Je-li L AFF nad K a $P \in \mathbb{P}_{L/K}$, dokažte, že $\mathcal{O}_P$ je jednoznačně určený diskrétní valuační okruh a $\deg P$ je konečné.

Odpovídající tvrzení: 4.10

3.6. **Singularity.**

5. Definujte singularity a hladké body a řekněte, jak je transformují afinní automorfismy. Zformulujte a dokažte charakterizaci hladkých WEP v krátkém tvaru.

Odpovídající tvrzení: 6.4 a 6.6

3.7. **Souřadnicové okruhy.**

6. Popište ideály oborů $K[x_1, \dots, x_n]$ s nenulovými průniky s podobory $K[x_i]$ a a všechny prvoideály oboru $K[x, y]$. Svá tvrzení dokažte.

Odpovídající tvrzení: 7.2, 7.3, 7.4

3.8. **Místa určená dvojicí.**

7. Nechť $w = yg(x, y) + h(x) + y \in K[x, y]$, kde $h \in K[x]$, $g \in K[x, y]$, $m := \mathrm{mult}(h) \geq 2$, $\mathrm{mult}(g) \geq 1$ a L je AFF nad K dané rovností $w(\alpha, \beta) = 0$. Zformulujte a dokažte tvrzení popisující místa obsahující α a β a odpovídající diskrétní valuaci.

Odpovídající tvrzení: 8.5

8. Pro AFF dané $w(\alpha, \beta) = 0$ a bod $(\gamma_1, \gamma_2) \in V_w(K)$ zformulujte a dokažte tvrzení o valuaci prvku $l_1\alpha + l_2\beta + l_0$ v místě obsahujícím $\alpha - \gamma_1$ a $\beta - \gamma_2$

Odpovídající tvrzení: 8.8

9. Pro AFF dané $w(\alpha, \beta) = 0$ a bod $(\gamma_1, \gamma_2) \in V_w(K)$ zformulujte a dokažte tvrzení, které stanoví přesnou hodnotu $\nu_P(\beta - \lambda\alpha + \mu)$ v místě P obsahujícím $\alpha - \gamma_1$ a $\beta - \gamma_2$.

Odpovídající tvrzení: 8.9

3.9. **Lokalizace v souřadnicovém okruhu.**

10. Popište místa odpovídající hladkým bodům a své tvrzení dokažte. Co jsou místa stupně 1 nad WEP?

Odpovídající tvrzení: 9.4, 9.8, 9.9

3.10. **Slabá aproximační věta a její důsledky.**

11. Zformulujte a dokažte Slabou aproximační větu a její důsledky pro velikost množiny míst a báze modulo místo.

Odpovídající tvrzení: 10.2, 10.,

12. Vyslovte a dokažte tvrzení o odhadu velikosti $[L : K(s)]$ a popište všechna místa stupně 1 nad WEP.

Odpovídající tvrzení: 10.4, 10.6, 10.7

3.11. **Divizory.**

13. Zformulujte a dokažte tvrzení o stupni pozitivní a negativní části hlavního divizoru.

Odpovídající tvrzení: 11.5

14. Vyslovte a dokažte Riemannovu větu a vysvětlete, co je to rod.

Odpovídající tvrzení: 11.10

15. Definujte pojem adele a vyslovte a dokažte Silnou aproximační větu. Čím zesiluje Slabou aproximační větu?

Odpovídající tvrzení: 11.14

3.12. **Weilovy diferenciály.**

16. Charakterizujte strukturu vektorových prostorů Weilových diferenciálů $\Omega_{L/K}$ a $\Omega_{L/K}(A)$ pro divizor A. Svá tvrzení dokažte.

Odpovídající tvrzení: 12.4

17. Zformulujte a dokažte Riemannovu-Rochovu větu a její Hlavní důsledek (o vztahu dimenze Riemannových-Rochových prostorů a stupňů divizorů).

Odpovídající tvrzení: 12.6, 12.8

3.13. **Eliptické funkční těleso.**

18. Charakterizujte AFF rodu 0 a své tvrzení dokažte.

Odpovídající tvrzení: 13.2, 13.3

19. Charakterizujte všechna eliptické funkční tělesa nad WEP w a své tvrzení dokažte.

Odpovídající tvrzení: 13.6

3.14. **Asociativní zákon.**

20. Popište grupovou strukturu na hladké křivce dané WEP a tvrzení dokažte.

Odpovídající tvrzení: 14.2, 14.3

3.15. **Projektivní křivky.**

21. Vyslovte a dokažte tvrzení o vztahu mezi AFF danými afinní a projektivní křivkou a popište normalizované diskrétní valuace AFF $K(\mathbb{P}^1)$.

Odpovídající tvrzení: 15.2, 15.4