Všechny kroky postupu vysvětlete (ideálně odkazem na použité tvrzení z přednášky).

1. Domácí úkol

Pošlete mailem do pátku 9.4., 22:00.

1.1. Nechť L je AFF nad K, P je nějaké jeho místo, $a \in L$ splňuje $a^2 \in P^3 \setminus P^6$ a ν_P je NDV určená místem P. Spočítejte (a) $\nu_P(a)$, (b) $\nu_P(a^{-1} - 1 + a^3)$, (c) $\nu_P(a^{13}(1+a^2)^9)$.

Hint: S pomocí 4.5 a 4.10 uvažte, že $\nu_P(x) \geq n \Leftrightarrow x \in P^n$ a pak použijte definici DV a 4.12

8 bodů

1.2. Pro Weierstrassův polynom $w = y^2 + yx + 2y - (x^3 + x^2 + 1) \in \mathbb{F}_5[x, y]$ najděte $\mathbb{F}_5$-ekvivalentní krátký Weierstrassův polynom.

Hint: Vyžijte důkazu 5.1

7 bodů

2. Domácí úkol

Pošlete mailem do pátku 23.4., 22:00.

2.1. Rozhodněte, zda je Weierstrassův polynom $y^2 - (x^3 - 4x^2 - x + 4) \in K[x, y]$ hladký či singulární, pokud (a) $K = \mathbb{R}$, (b) $K = \mathbb{F}_5$

Hint: Využijte Tvrzení 6.6.

7 bodů

2.2. Najděte všechny singularity Weierstrassova polynomu $y^2+y(2x+1)-(x^3+2x^2+2x) \in \mathbb{F}_3[x, y]$.

Hint: Pomocí důkazu 5.1 a předchozích pozorování najděte afinní transformaci polynomu na tvar z 6.6 a poté singularitu nalezenou v důkazu 6.6 převeďte pomocí 6.4

8 bodů

3. Domácí úkol

Pošlete mailem do pátku 7.5., 22:00.

3.1. Nechť $f = y^2 - (x^3 + 2x^2 + 1) \in \mathbb{Q}[x, y]$ je Weierstrassův polynom a L algebraické funkční těleso nad $\mathbb{Q}$ určené rovností $f(\alpha, \beta) = 0$ a nechť ν je normalizovaná diskrétní valuace L nad $\mathbb{Q}$ splňující $\nu(\alpha - 1) > 0$ a $\nu(\beta - 2) > 0$. Určete všechna $(l_0, l_1, l_2) \in \mathbb{Q}^3$, že

(a) $\nu(l_0 + l_1\alpha + l_2\beta) = 1$,

(b) $\nu(l_0 + l_1\alpha + l_2\beta) > 1$,

Hint: Využijte toho, že $(1, 2) \in V_f(\mathbb{Q})$, určete tečnu pomocí 6.2 a využijte tvrzení 8.8 a lineárně algebraicky popište všechny vyhovující (l_0, l_1, l_2).

9 bodů

3.2. Je-li $w = y^2 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x, y]$ Weierstrassův polynom a L algebraické funkční těleso nad $\mathbb{F}_2$ určené rovností $w(\alpha, \beta) = 0$, najděte nějaké $a \in L$, pro něž $a, a^{-1} \notin \mathcal{O}_{(1,1)}$.

Hint: Ukažte, že je $(1, 1)$ singularita w a poté použijte důkaz 9.1 jako v příkladu 9.2.

6 bodů

4. DOMÁCÍ ÚKOL

Pošlete mailem do pátku 28.5., 22:00.

4.1. Popište hlavní divizor $(\alpha-\beta-3)$ AFF L nad tělesem $\mathbb{Q}$ daného rovností $f(\alpha,\beta)=0$ (tj. určete stupně míst s nenulovým koeficientem a příslušné koeficienty), víte-li, že f je hladký WEP a neexistuje žádné $\gamma \in V_f(\mathbb{Q})$ splňující $l(\gamma)=f(\gamma)=0$ pro $l(x,y)=x-y-3$.

Hint: Postupujte jako v Příkladu 11.7 a uvažte, že $\nu_P(\alpha-\beta-3)<0$ znamená, že je ν_P záporné na některém ze sčítanců a poté pomocí 10.6 a 4.8 určete záporné $\nu_P(\alpha-\beta-3)$. Pomocí 8.8 nahlédněte, že žádný koeficient u místa stupně 1 není kladný a poté s využitím 11.5. spočítejte stupně a koeficienty pozitivní části divizoru $(\alpha-\beta-3)$.

7 bodů

4.2. Spočítejte počt míst AFF L určeného rovností $w(\alpha,\beta)=0$ pro $w=y^2+y+x^3+1 \in \mathbb{F}_2[x,y]$:

(a) $|\{P \in \mathbb{P}_{L/\mathbb{F}_2} \mid \beta^{-3} \in P\}|$,

(b) $|\{P \in \mathbb{P}_{L/\mathbb{F}_2} \mid \nu_P(\alpha+\beta-1)<0\}|$,

(c) $|\{P \in \mathbb{P}_{L/\mathbb{F}_2} \mid \alpha+1 \in P\}|$.

Hint: (a) Všimněte si, že $\beta^{-3} \in P \Rightarrow \nu_P(\beta)<0$ a použijte 10.6.

(b) Opět uvažte, že $\nu_P(\alpha+\beta-1)<0$ znamená, že je ν_P záporné na některém ze sčítanců a pak postupujte jako v a).

(c) Spočítejte $[L_2 : K(\alpha)] = [L_2 : K(\alpha+1)]$ a jako v Příkladu 11.7 určete pozitivní část hlavního divizoru $(\alpha+1)$.

8 bodů