OTÁZKY A ÚLOHY KE ZKOUŠCE Z ÚVODU DO TEORIE GRUP

1. Operátorové grupy.

1.1. Zaveďte pojem Ω-grupa a Ω-invariantní podgrupa. Definujte charakteristické a úplně charakteristické podgrupy a uveďte v D_{16} tři charakteristické podgrupy (a ověřte to).

1.2. Vyslovte a dokažte Větu o homomorfismu a První větu o izomorfismu pro Ω-grupy. V jakém vztahu je centrum grupy G a grupa vnitřních automorfismů grupy G? Své tvrzení dokažte.

1.3. Spočítejte centrum $Z(Q)$ grupy kvaterninonů $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Rozhodněte, zda je $Z(Q)$ (a) normální, (b) charakteristická, (c) úplně charakteristická podgrupa grupy Q. Svá tvrzení odůvodněte.

1.4. Vyslovte a dokažte Druhou a Třetí větu o izomorfismu pro Ω-grupy.

1.5. Popište a určete počet prvků množin $\mathrm{End}(\mathbb{Z}_3^3)$ a $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3^3)$. Popište všechny charakteristické a úplně charakteristické podgrupy aditivní grupy $\mathbb{Z}_3^3$.

2. Kompoziční řady.

2.1. Zaveďte pojmy Ω-jednoduchá grupa, subnormální Ω-řada a kompoziční Ω-řada. Spočítejte kompoziční $\emptyset$-řadu grupy S_n pro všechna přirozená n (tvrzení o jednoduchosti grup A_n nemusíte dokazovat).

2.2. Co znamená, že jsou dvě řady Ω-izomorfní? Vyslovte a dokažte Jordan Hölderovu větu o jednoznačnosti kompozičních Ω-řad.

2.3. Najděte všechny hlavní a všechny hlavní charakteristické řady cyklické grupy $\langle g \rangle$ řádu 77.

2.4. Najděte všechny hlavní a všechny hlavní charakteristické řady grupy D_8.

2.5. Najděte nějakou kompoziční řadu grupy D_{40}.

3. Řešitelné a nilpotentní grupy.

3.1. Zkonstruujte horní centrální řadu grupy a ověřte korektnost konstrukce. Definujte nilpotentní grupu a rozhodněte, které z grup $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{20})$, $\mathbf{S}_{20}$, D_{20} jsou nilpotentní. Svá tvrzení odůvodněte.

3.2. Definujte řešitelnou grupu a rozhodněte, které z grup $\mathbb{Z}_4$, $\mathbf{S}_3$, $\mathrm{Inn}(\mathbf{S}_4)$, D_{12} jsou řešitelné a případně určete stupeň řešitelnosti. Svá tvrzení odůvodněte.

3.3. Charakterizujte řešitelnost grupy pomocí subnormálních řad a vyslovte tvrzení o vztahu nilpotentních a řešitelných grup. Tvrzení dokažte.

3.4. Definujte řešitelnou a nilpotentní grupu. Uveďte aspoň tři příklady řešitelných grup, které nejsou nilpotentní.

3.5. Vyslovte a dokažte tvrzení o nilpotenci p-grup. Je každá konečná p-grupa řešitelná?

3.6. Vyslovte a dokažte tvrzení o uzavřenosti třídy nilpoteních a řešitelných p-grup na podgrupy a faktory.

4. Součiny grup

4.1. Zaveďte direktní a semidirektní součin dvou grup. Vyslovte a dokažte tvrzení o tom, kdy je grupa izomorfní semidirektnímu součinu svých podgrup.

4.2. Definujte volný součin systému grup. Co je redukované slovo? Vyslovte a dokažte univerzální vlastnost volného součinu, tj. tvrzení o existenci a jednoznačnosti homomorfismu do libovolné grupy se systémem daných homomorfismů (tvrzení o unicitě redukovaného slova nemusíte dokazovat).

4.3. Zaveďte pojem volná grupa. Vyslovte a dokažte tvrzení o existenci volných grup s danou volnou bází. Existují dvě neizomorfní volné grupy s volnou bází velikosti 2^{57}?

4.4. Definujte semidirektní součin a popište až na izomorfismus všechny semidirektní součiny $S_3 \rtimes A_7$. Svá tvrzení odůvodněte.

4.5. Napište S_4 (až na izomorfismus) všemi možnými způsoby jako semidirektní součin $H \rtimes K$. Svá tvrzení odůvodněte.

5. Sylowovy podgrupy

5.1. Zaveďte pojem Sylowovy podgrupy a vyslovte a dokažte Sylowovy věty.

5.2. Vyslovte a dokažte charakterizaci konečných nilpotentních grup pomocí Sylowových podgrup.

5.3. Popište všechny Sylowovy podgrupy grup (a) Z_6, (b) S_6. Svá tvrzení odůvodněte.

5.4. Popište všechny Sylowovy podgrupy grupy $S_3 \times S_4$. Svá tvrzení odůvodněte.

5.5. Definujte pojem Sylowovy podgrupy a rozhodněte, zda grupa S_{100} obsahuje podgrupu řádu 2^{50}. Své tvrzení odůvodněte.

6. Volné grupy

6.1. Definujte pojem Schreierova transversála. Je-li $\varphi : F(\{x,y\}) \to S_4$ homomorfismus na S_4 určený $\varphi(x) = (12)$, $\varphi(y) = (1234)$, najděte Schreierovu transversálu podgrupy $Ker\ \varphi$.

6.2. Vyslovte a dokažte tvrzení o podgrupě konečného indexu konečně generované grupy.

6.3. Je-li $\varphi : F(\{x,y\}) \to S_3$ homomorfismus na S_3 určený $\varphi(x) = (12)$, $\varphi(y) = (123)$, najděte volnou bázi grupy $Ker\ \varphi$.

6.4. Existuje ve volné grupě o dvou generátorech $F(x,y)$ normální podgrupa indexu 126? Je grupa $F(x,y)$ řešitelná? Svá tvrzení odůvodněte.

6.5. Vyslovte tvrzení o podgrupách volných grup. Existuje faktor volné grupy o dvou generátorech izomorfní grupě S_6? Své tvrzení odůvodněte.