Silně kompaktní kardinály a SCH

Narusevych Mykyta

3. března 2020

Osnova

1. Úvod
2. Kardinální čísla
3. Kardinální aritmetika
4. GCH a SCH

Cíl práce vs cíl prezentace

Cíl práce vs cíl prezentace

- Cíl práce: zavést pojem silně kompaktního kardinálního čísla a podát průhledný důkaz Solovayovy a Silverovy věty

Cíl práce vs cíl prezentace

- Cíl práce: zavést pojem silně kompaktního kardinálního čísla a podát průhledný důkaz Solovayovy a Silverovy věty
- Cíl prezentace: stručně a neformálně zadefinovat pojem kardinálního čísla a kardinální aritmetiky, vysvětlit motivaci dvou základních kardinálních hypotéz

ZFC teorie množin

ZFC teorie množin

- Vzhledem k tomu, že se jedná o teorii množin, museli bychom pořádně zadefinovat ZFC teorii. Je to ale v tuto chvili zbytečně a stačí chápat ZFC neformálně jako pravidla umožňující konstruovat nové množiny z předem daných množin, např. množinu všech podmnožin dané množiny

ZFC teorie množin

- Vzhledem k tomu, že se jedná o teorii množin, museli bychom pořádně zadefinovat ZFC teorii. Je to ale v tuto chvili zbytečně a stačí chápat ZFC neformálně jako pravidla umožňující konstruovat nové množiny z předem daných množin, např. množinu všech podmnožin dané množiny
- Všechny množiny s nimiž setkáváte v různých oborech jsou množinami dle ZFC, takže množiny lze chápat intuitivně jako soubory prvků nějakých vlastností i když ve skutečnosti takové jednoduché chápání vede ke sporu

Motivace a pojem mohutnosti

Motivace a pojem mohutnosti

- Chceme zkonstruovat matematický aparát, umožňující vyjadřovat o intuitvně jasném pojmu velikosti množiny

Motivace a pojem mohutnosti

- Chceme zkonstruovat matematický aparát, umožňující vyjadřovat o intuitvně jasném pojmu velikosti množiny
- V konečnem případě k tomu slouží konečná přirozená čísla

Motivace a pojem mohutnosti

- Chceme zkonstruovat matematický aparát, umožňující vyjadřovat o intuitvně jasném pojmu velikosti množiny
- V konečnem případě k tomu slouží konečná přirozená čísla
- Chceme nějakou analogii přírozenýh čísel ale pro nekonečné množiny

Motivace a pojem mohutnosti

- Chceme zkonstruovat matematický aparát, umožňující vyjadřovat o intuitvně jasném pojmu velikosti množiny
- V konečnem případě k tomu slouží konečná přirozená čísla
- Chceme nějakou analogii přírozenýh čísel ale pro nekonečné množiny
- Nejprve musíme říct, co znamená, že dvě množiny (i nekonečné) jsou stejně velké:

Motivace a pojem mohutnosti

- Chceme zkonstruovat matematický aparát, umožňující vyjadřovat o intuitvně jasném pojmu velikosti množiny
- V konečnem případě k tomu slouží konečná přirozená čísla
- Chceme nějakou analogii přírozenýh čísel ale pro nekonečné množiny
- Nejprve musíme říct, co znamená, že dvě množiny (i nekonečné) jsou stejně velké:

Definice

Řekneme, že množiny A a B jsou stejně velké nebo **stejně mohutné**, pokud existuje bijektivní zobrazení f z A do B. Značíme to $\mid A \mid = \mid B \mid$.

Příklady

Příklady

- Množiny stejně mohutné jako $\mathbb{N}$ se nazývají **spočetné**

Příklady

- Množiny stejně mohutné jako $\mathbb{N}$ se nazývají **spočetné**
- Z prvních ročníků známe spoustu příkladů spočetných množin, např. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a další

Příklady

- Množiny stejně mohutné jako $\mathbb{N}$ se nazývají **spočetné**
- Z prvních ročníků známe spoustu příkladů spočetných množin, např. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a další
- Také dobře známe pojem **kontinuum velké** množiny, což je stejná mohutnost jako u $\mathbb{R}$

Příklady

- Množiny stejně mohutné jako $\mathbb{N}$ se nazývají **spočetné**
- Z prvních ročníků známe spoustu příkladů spočetných množin, např. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a další
- Také dobře známe pojem **kontinuum velké** množiny, což je stejná mohutnost jako u $\mathbb{R}$
- Příkladem je množina všech funkci z přirozených čísel do přirozenych čísel, nebo množina všech posloupností přirozených čísel

Jak na kardinální čísla?

Jak na kardinální čísla?

- Máme teď všechny množiny rozdělené do tříd obsahujících stejně mohutné

Jak na kardinální čísla?

- Máme teď všechný množiny rozdělené do tříd obsahujících stejně mohutné
- Kardinálním číslem bychom chtěli prohlasit nějaký objekt tak, že ke každé množině by se dálo najít právě jedno kardinální číslo vyjadřující velikost této množiny a zároveň aby stejně mohutným množinam bylo přířazeno stejné kardinální číslo

Jak na kardinální čísla?

- Máme teď všechný množiny rozdělené do tříd obsahujících stejně mohutné
- Kardinálním číslem bychom chtěli prohlasit nějaký objekt tak, že ke každé množině by se dálo najít právě jedno kardinální číslo vyjadřující velikost této množiny a zároveň aby stejně mohutným množinam bylo přířazeno stejné kardinální číslo
- První přirozený kandidát - prohlasit kardinálním číslem dané množiny třidu všech stejně mohutných množin obsahující danou množinu

Jak na kardinální čísla?

- Máme teď všechny množiny rozdělené do tříd obsahujících stejně mohutné
- Kardinálním číslem bychom chtěli prohlasit nějaký objekt tak, že ke každé množině by se dálo najít právě jedno kardinální číslo vyjadřující velikost této množiny a zároveň aby stejně mohutným množinam bylo přířazeno stejné kardinální číslo
- První přirozený kandidát - prohlasit kardinálním číslem dané množiny třidu všech stejně mohutných množin obsahující danou množinu
- Problem: tato třída je potom "příliš velká" a už není množinou ve smyslu ZFC. Je takzvanou vlastní třidou a ZFC neumí pořádně pracovat s vlastními třídami

Jak na kardinální čísla? Řešení

Jak na kardinální čísla? Řešení

- Jiný způsob: navíc chceme aby kardinální číslo samotné bylo množinou

Jak na kardinální čísla? Řešení

- Jiný způsob: navíc chceme aby kardinální číslo samotné bylo množinou
- Dá se to udělat i v teorii množin slabší (méně axiomů) než ZFC, konkretněji v teorii množin bez axiomu výběru ale s axiomem fundovanosti

Jak na kardinální čísla? Řešení

- Jiný způsob: navíc chceme aby kardinální číslo samotné bylo množinou
- Dá se to udělat i v teorii množin slabší (méně axiomů) než ZFC, konkretněji v teorii množin bez axiomu výběru ale s axiomem fundovanosti
- V ZFC kardínalnímy čisly se nazývají *ordinální čísla* určitých vlastností (kde ordinální číslo je množinovým reprezentantem dobrého uspořádání)

Jak na kardinální čísla? Řešení

- Jiný způsob: navíc chceme aby kardinální číslo samotné bylo množinou
- Dá se to udělat i v teorii množin slabší (méně axiomů) než ZFC, konkretněji v teorii množin bez axiomu výběru ale s axiomem fundovanosti
- V ZFC kardínalnímy čisly se nazývají *ordinální čísla* určitých vlastností (kde ordinální číslo je množinovým reprezentantem dobrého uspořádání)
- Stačí chápat kardinální číslo jako nějakou množinu, kde navíc *mohutnost* (velikost) kardinálního čísla jako množiny je ono samotné

Pokračování

Pokračování

- Kardínalní čísla stejně jako konečná čísla jsou lineárně uspořádáné dle velikosti. Navíc nad každym kardínalním číslem se nájde nejmenší ostře větší kardínalní číslo. Pro daný kardínal κ se to číslo nazývá *následník* κ a značí se κ^+

Pokračování

- Kardínalní čísla stejně jako konečná čísla jsou lineárně uspořádáné dle velikosti. Navíc nad každym kardínalním číslem se nájde nejmenší ostře větší kardínalní číslo. Pro daný kardínal κ se to číslo nazývá *následník* κ a značí se κ^+
- Všechna přirozená čísla lze také chápat jako nejmenší kardinální čísla

Pokračování

- Kardínalní čísla stejně jako konečná čísla jsou lineárně uspořádáné dle velikosti. Navíc nad každym kardínalním číslem se nájde nejmenší ostře větší kardínalní číslo. Pro daný kardínal κ se to číslo nazývá *následník* κ a značí se κ^+
- Všechna přirozená čísla lze také chápat jako nejmenší kardinální čísla
- Další čísla, jako celá nebo racionální, už nejsou v tomto smyslu kardinální neboť nevyjadřujou žádné velikosti ale používájí se pro jiné koncepty

Kardinální aritmetika a její motivace

Kardinální aritmetika a její motivace

- Chceme rozšířit aritmetické operace z konečných čísel na všechna kardínální čísla

Kardinální aritmetika a její motivace

- Chceme rozšířit aritmetické operace z konečných čísel na všechna kardínální čísla
- Nejprve musíme říct jak se interpretujou aritmetické operace na konečných číslách v řeči teorii množin

Kardinální aritmetika a její motivace

- Chceme rozšířit aritmetické operace z konečných čísel na všechna kardínální čísla
- Nejprve musíme říct jak se interpretujou aritmetické operace na konečných číslách v řeči teorii množin
- Sčítání dvou čísel a a b je počítání velikosti množiny C která je disjunktním sjednocením libovolných množin velikostí a a b

Kardinální aritmetika a její motivace

- Chceme rozšířit aritmetické operace z konečných čísel na všechna kardínální čísla
- Nejprve musíme říct jak se interpretujou aritmetické operace na konečných číslách v řeči teorii množin
- Sčítání dvou čísel a a b je počítání velikosti množiny C která je disjunktním sjednocením libovolných množin velikostí a a b
- Podobně se dá interpretovat i násobení (počet uspořádáných dvojic) a mocnění (počet zobrazení z jedné množiny do jiné)

Kardinální aritmetika a její motivace

- Chceme rozšířit aritmetické operace z konečných čísel na všechna kardínální čísla
- Nejprve musíme říct jak se interpretujou aritmetické operace na konečných číslách v řeči teorii množin
- Sčítání dvou čísel a a b je počítání velikosti množiny C která je disjunktním sjednocením libovolných množin velikostí a a b
- Podobně se dá interpretovat i násobení (počet uspořádáných dvojic) a mocnění (počet zobrazení z jedné množiny do jiné)
- Je vidět že tato interpretace nikde nepředpokládá konečnost množin

Základní definice

Základní definice

Definice

Nechť κ a λ jsou kardínalní čísla, X je množina velikosti κ a Y je množina velikosti λ. Potom $\kappa + \lambda$ je mohutnost množiny $X \cup Y$, kde $X \cap Y = \emptyset$. $\kappa \times \lambda$ je mohutnost množiny $X \times Y$, což je množinový kartezský součin. κ^λ je mohutnost množiny X^Y, což je množina všech zobrazení z Y do X.

Základní definice

Definice

Nechť κ a λ jsou kardínalní čísla, X je množina velikosti κ a Y je množina velikosti λ. Potom $\kappa + \lambda$ je mohutnost množiny $X \cup Y$, kde $X \cap Y = \emptyset$. $\kappa \times \lambda$ je mohutnost množiny $X \times Y$, což je množinový kartezský součin. κ^λ je mohutnost množiny X^Y, což je množina všech zobrazení z Y do X.

- Tyto operace jsou dobře definované a nezáleží na volbě konkretních X a Y

Základní vlastnosti

Základní vlastnosti

- Na konečných číslech se tyto množinové operace chovají úplně stejně jako standardní konečná aritmetika

Základní vlastnosti

- Na konečných číslách se tyto množinové operace chovají úplně stejně jako standardní konečná aritmetika
- Ukazuje se že sčítání a násobení pro nekonečná kardínalní čísla je triviální

Základní vlastnosti

- Na konečných číslách se tyto množinové operace chovají úplně stejně jako standardní konečná aritmetika
- Ukazuje se že sčítání a násobení pro nekonečná kardínalní čísla je triviální

Věta

Nechť κ je kardínalní číslo a λ je nekonečné kardínalní číslo. Potom $\kappa + \lambda = \kappa \times \lambda = max\{\kappa, \lambda\}$.

Mocnění

Mocnění

- Na rozdíl od sčítání a násobení mocnění je mnohem složitější operace

Mocnění

- Na rozdíl od sčítání a násobení mocnění je mnohem složitější operace
- Mocnění na konečné číslo se redukuje na konecně násobení a to se redukuje na maximum

Mocnění

- Na rozdíl od sčítání a násobení mocnění je mnohem složitější operace
- Mocnění na konečné číslo se redukuje na konecně násobení a to se redukuje na maximum

Věta

$\kappa^n = \kappa \times \ldots \times \kappa = max\{\kappa, \ldots, \kappa\} = \kappa$, kde n značí konečné číslo, a κ - nekonečné kardinální číslo

Mocnění

- Na rozdíl od sčítání a násobení mocnění je mnohem složitější operace
- Mocnění na konečné číslo se redukuje na konecně násobení a to se redukuje na maximum

Věta

$\kappa^n = \kappa \times \ldots \times \kappa = max\{\kappa, \ldots, \kappa\} = \kappa$, kde n značí konečné číslo, a κ - nekonečné kardinální číslo

- Jakmile zvedneme exponent, tak se situace už dramaticky zesložití a to i pro nejjednodušší možný základ

Mocnění

- Na rozdíl od sčítání a násobení mocnění je mnohem složitější operace
- Mocnění na konečné číslo se redukuje na konecně násobení a to se redukuje na maximum

Věta

$\kappa^n = \kappa \times ... \times \kappa = max\{\kappa, ..., \kappa\} = \kappa$, *kde n značí konečné číslo, a* κ *- nekonečné kardinální číslo*

- Jakmile zvedneme exponent, tak se situace už dramaticky zesložití a to i pro nejjednodušší možný základ
- Platí ale známá věta:

Mocnění

- Na rozdíl od sčítání a násobení mocnění je mnohem složitější operace
- Mocnění na konečné číslo se redukuje na konecně násobení a to se redukuje na maximum

Věta

$\kappa^n = \kappa \times ... \times \kappa = max\{\kappa, ..., \kappa\} = \kappa$, kde n značí konečné číslo, a κ - nekonečné kardinální číslo

- Jakmile zvedneme exponent, tak se situace už dramaticky zesložití a to i pro nejjednodušší možný základ
- Platí ale známá věta:

Věta (Cantorova)

$2^\kappa \gneq \kappa$.

Hypotéza kontinua

Hypotéza kontinua

- Chceme vyšetřit čemu se rovná 2^κ. Dle Cantorovy věty toto číslo musí být ostře nad κ

Hypotéza kontinua

- Chceme vyšetřit čemu se rovná 2^κ. Dle Cantorovy věty toto číslo musí být ostře nad κ
- Přirozená otázka je zda $2^\kappa = \kappa^+$?

Hypotéza kontinua

- Chceme vyšetřit čemu se rovná 2^κ. Dle Cantorovy věty toto číslo musí být ostře nad κ
- Přirozená otázka je zda $2^\kappa = \kappa^+$?
- Kladná odpověď je známá jako **General Continuum Hypothesis**, nebo zkráceně **GCH**

Hypotéza kontinua

- Chceme vyšetřit čemu se rovná 2^κ. Dle Cantorovy věty toto číslo musí být ostře nad κ
- Přirozená otázka je zda $2^\kappa = \kappa^+$?
- Kladná odpověď je známá jako **General Continuum Hypothesis**, nebo zkráceně **GCH**
- Ukázalo se, že tato hypotéza je bezesporná s axiomy ZFC

Hypotéza kontinua

- Chceme vyšetřit čemu se rovná 2^κ. Dle Cantorovy věty toto číslo musí být ostře nad κ
- Přirozená otázka je zda $2^\kappa = \kappa^+$?
- Kladná odpověď je známá jako **General Continuum Hypothesis**, nebo zkráceně **GCH**
- Ukázalo se, že tato hypotéza je bezesporná s axiomy ZFC
- Mnohem překvapivěji je to, že ve skutečnosti tato hypotéza je nedokazatelná v ZFC, důkaz čehož vyžaduje netriviální pojem forcingu

Pár slov o SCH

Pár slov o SCH

- Po objevení forcingu a prokázání nedokazatelnosti GCH v ZFC Robert Solovay vyslovil jemnější hypotézu, která je teď známá jako **Singular Cardinal Hypothesis** nebo zkráceně **SCH**

Pár slov o SCH

- Po objevení forcingu a prokázání nedokazatelnosti GCH v ZFC Robert Solovay vyslovil jemnější hypotézu, která je teď známá jako **Singular Cardinal Hypothesis** nebo zkráceně **SCH**
- V ní se jedná o mocnění nějakých kardinálních čísel a tato hypotéza je slabší než GCH

Pár slov o SCH

- Po objevení forcingu a prokázání nedokazatelnosti GCH v ZFC Robert Solovay vyslovil jemnější hypotézu, která je teď známá jako **Singular Cardinal Hypothesis** nebo zkráceně **SCH**
- V ní se jedná o mocnění nějakých kardinálních čísel a tato hypotéza je slabší než GCH
- Konkretněji SCH říká, že pro κ - *singulární kardinalní číslo* plaí $\kappa^{cf(\kappa)} = \max\{\kappa^+, 2^{cf(\kappa)}\}$. Zde ale nemám prostor na vysvětlení všech pojmů potřebných k pochopení tohoto znění

Pár slov o SCH

- Po objevení forcingu a prokázání nedokazatelnosti GCH v ZFC Robert Solovay vyslovil jemnější hypotézu, která je teď známá jako **Singular Cardinal Hypothesis** nebo zkráceně **SCH**
- V ní se jedná o mocnění nějakých kardinálních čísel a tato hypotéza je slabší než GCH
- Konkretněji SCH říká, že pro κ - *singulární kardinalní číslo* plaí $\kappa^{cf(\kappa)} = \max\{\kappa^+, 2^{cf(\kappa)}\}$. Zde ale nemám prostor na vysvětlení všech pojmů potřebných k pochopení tohoto znění
- Tato hypotéza radikálně zjednodušuje kardinální mocnění a zároveň není tak omezující jako GCH

Pár slov o SCH

- Po objevení forcingu a prokázání nedokazatelnosti GCH v ZFC Robert Solovay vyslovil jemnější hypotézu, která je teď známá jako **Singular Cardinal Hypothesis** nebo zkráceně **SCH**
- V ní se jedná o mocnění nějakých kardinálních čísel a tato hypotéza je slabší než GCH
- Konkretněji SCH říká, že pro κ - *singulární kardinalní číslo* plaí $\kappa^{cf(\kappa)} = \max\{\kappa^+, 2^{cf(\kappa)}\}$. Zde ale nemám prostor na vysvětlení všech pojmů potřebných k pochopení tohoto znění
- Tato hypotéza radikálně zjednodušuje kardinální mocnění a zároveň není tak omezující jako GCH
- Dnes ale není známo, zda tuto hypotézu lze dokázat v ZFC (i když je známo, že její negace v ZFC dokazatelná není)

Díky za pozornost!