Stein-Weissovy gradienty

Marek Malý

25. Března 2020

Osnova

- Cílem práce je seznámit se s konstrukcí invariantních diferenciálních operátorů prvního řádu a uvést pár základních příkladů.
  Stein-Weissově konstrukci se mimo jiné říká „zobecnění Cauchy-Riemannových podmínek na $\mathbb{R}^n$“.
- Nejprve seznámíme čtenáře s pojmy jako jsou „invariantní operátor“, „invariantní podprostor“ a jiné, abychom je mohli v konstrukci používat.
- Poté uvedeme samotnou Stein-Weissovu konstrukci a dokážeme, že tím vytvoříme skutečně invariantní operátor.
- Nakonec uvedeme pár konkrétních příkladů z matematiky nebo fyziky.

Lieova grupa

Definice (Grupa - Zjednodušeně)

Grupa je čtveřice $(G, *, ^{-1}, e)$, kde
G je množina prvků, na které jsou definované asociativní operace „násobení“ $*$ a „inverz“ $^{-1}$. Prvek $e \in G$ je neutrální vůči operaci násobení.

- Př:
  $(\mathbb{R}, +, -, 0)$ Reálná čísla aditivně,
  $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot, ^{-1}, I)$ Invertibilní matice typu $\mathbb{R}^{n \times n}$
- Jako grupu často nazýváme pouze její nosnou množinu, pokud jsou operace zřejmé.
- V dalším budeme uvažovat tzv. Lieovy grupy, to jsou grupy, které lze lokálně diffeomorfně ztotožnit s $\mathbb{R}^n$.
  Takové jsou např. $GL(n, \mathbb{R})$ nebo $SO(n, \mathbb{R})$.

Reprezentace

Definice (Reprezentace)

Pro V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ konečné dimenze,
reprezentace Lieovy grupy G **na** V je zobrazení $\varrho : G \to GL(V)$, pokud ϱ je grupový homomorfismus.
(Tj. $\forall g, h \in G : \varrho(g * h) = \varrho(g) \circ \varrho(h)$).

- Jako reprezentace se také často označuje samotné V. Já zde budu používat pro V termín **reprezentační prostor**.
- Př.
  Definujeme reprezentaci grupy $GL(n, \mathbb{R})$ na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ tak, že $\varrho(M)(v) = M \cdot v$,
  pro $M \in GL(n, \mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$ a $M \cdot v$ je klasické násobení „matice krát vektor“.

Reprezentace

Definice (Irreducibilní reprezentace)

Je-li V reprezentační prostor G, pak o podprostoru $W < V$ řekneme, že je to **invariantní podprostor**, pokud $\forall g \in G$, $\forall w \in W$ platí, že $\varrho(g)(w) \in W$.
Pak V je **irreducibilní reprezentace (reprezentační prostor) grupy** G, pokud jeho jediné invariantní podprostory jsou V a $\{0\}$.

Věta (Rozklad na irreducibilní reprezentace)

Je-li V reprezentační prostor **Lieovy** *grupy G, pak platí, že $V \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$, kde všechny V_i jsou irreducibilní reprezentace grupy G.*

- Př.
  $\mathbb{R}^2$ je irreducibilní reprezentace grupy rotací kolem počátku.

Invariantní operátor

Definice (Invariantní operátor)

Jsou-li V, W reprezentační prostory grupy G, pak o operátoru $\varphi : V \to W$ řekneme, že je **invariantní (vůči reprezentaci G)**, pokud komutuje s reprezentací grup.
Tj. $\forall g \in G$, $\forall v \in V$: $\varrho_W(g)(\varphi(v)) = \varphi(\varrho_V(g)(v))$.

- Elegantnější zápis je při vynechání ϱ, pokud zobrazení reprezentace je zřejmé.
  $g \circ \varphi(v) = \varphi \circ g(v)$.
- Př.
  Pro $h \in G$, pokud G je komutativní, je $\varrho(h) : V \to V$ invariantní operátor. Neboť
  $\varrho(g) \circ \varrho(h)(v) = \varrho(g * h)(v) = \varrho(h * g)(v) = \varrho(h) \circ \varrho(g)(v)$.

Zbytek reprezentační teorie

- V práci budeme využívat též pojmy jako „váha reprezentace“, „fundamentální váhy“, „Cartanův součin“ atp.
  Tyto pojmy tu nebudu zavádět, neboť by zabraly přespříliš místa.
- V práci budeme uvažovat převážně reprezentace maticových grup $SO(n, \mathbb{R})$ a $Spin(n)$.
  Proto se v dalším omezíme na pohled reálného prostoru $\mathbb{R}^n$ s reprezentací danou násobením příslušných matic.
- Často se vyplatí místo reálných grup a prostorů uvažovat komplexní.

Obecná konstrukce

- Uvažme zobrazení $f : \Omega \to V$, čili $f \in C^\infty(\Omega, V)$ kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a V je irreducibilní reprezentace (reprezentační prostor) grupy G.
  Pak platí, že $\nabla f \in End(\Omega, V \otimes \mathbb{C}^n)$.
  ($V \otimes \mathbb{C}^n$ je prostor (v našem případě) prvků tvaru $\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$)
- Uvažme navíc tzv. definující reprezentaci $\mathbb{C}^n$, (tj. změna souřadnic pomocí maticového zobrazení $g \in G$).
- Rozložíme $V \otimes \mathbb{C}^n$ na irreducibilní reprezentace $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ a uvažujme projekci π_i na příslušné F_i.

Obecná konstrukce

Věta (Stein-Weiss)

Definujeme-li $D_i := \pi_i \circ \nabla : End(\Omega, V) \to End(\Omega, F_i)$*, pak* D_i *je* G*-invariantní diferenciální operátor 1. řádu.*

- Diferenciální operátor prvního řádu je operátor, který používá derivace prvku $f \in End(\Omega, V)$ až do prvního řádu derivace.

Motivace

- Touto teorií chceme vytvořit především rotačně–invariantní diferenciální operátory.
- Rotace odpovídají reprezentaci grupy $SO(n, \mathbb{C})$. Z teorie je ale vidět, že umíme „lépe“ reprezentovat spíše grupu $Spin(n, \mathbb{C})$, která dvakrát nakrývá předchozí grupu.
- A vzhledem k povaze spinorových reprezentací je potřeba rozlišit případy, kdy n je sudé, či liché.

Cauchy-Riemannovy podmínky

- Zobecněné Cauchy-Riemannovy podmínky (tj. soubor rovnic) dostaneme, když uvažujeme rozklad

$$V \otimes \mathbb{C}^n = F_1 \oplus F_2,$$

kde F_1 je (konkrétní) irreducibilní reprezentace, (uvažujeme grupu $SO(n)$, nebo lépe její nakrytí grupou $Spin(n)$), ale F_2 být nemusí, a pak požadujeme, aby

$$D_2(f) = 0.$$

Cauchy-Riemannovy podmínky

- Uvažujeme-li grupu $SO(2, \mathbb{R})$, kterou díky tomu, že to jsou rotace, můžeme ztotožnit s jednotkovou kružnicí v $\mathbb{C}$, pak se definující reprezentace $\mathbb{C}^2$ dělí na

$$\varrho_{\pm}(t)(z) = e^{\pm it} z.$$

- Uvažujme nyní projekci tak, abychom dostali příslušný operátor D_+, (příslušný reprezentaci ϱ_+).
  Tuto skutečnost lze také jinak napsat, že

$$D_- \equiv 0.$$

- Po rozepsání této rovnosti dostaneme přesně Cauchy-Riemannovy podmínky na $\mathbb{C}$.

Děkuji za pozornost.