

1 Soustavy lineárních rovnic v analytické geometrii

1.1. Uvažujme v \mathbb{R}^2 přímkou s parametrickým vyjádřením

$$p = \{(1, 2) + t \cdot (1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Určete obecné vyjádření přímky p ,
- (b) najděte průsečíky přímky p s osou x a osou y ,
- (c) rozhodněte, které z bodů $(2, 3)$, $(3, 2)$ a $(-1, 1)$ leží na p .

(a) Spočítáme normálový vektor $(1, -1)$, který je právě kolmý na směrový vektor přímky $(1, 1)$. To znamená, že rovnice přímky má tvar $x - y = c$ pro vhodné reálné číslo c . Nyní dosazením bodu $(x, y) = (1, 2)$ z parametrického zadání dostaneme $c = 1 - 2 = -1$, tedy obecné vyjádření přímky má tvar

$$p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = -1\}.$$

Poznamenejme, že vyjádření je určeno jednoznačně až na násobek celé rovnice nenulovým reálným číslem.

(b) Stačí postupně dosadit za y a x nulu do rovnice obecného vyjádření. Pro $y = 0$ dostáváme $x - 0 = -1$ a pro $x = 0$ máme $0 - y = -1$, tudíž hledané průsečíky jsou $(-1, 0)$ a $(0, 1)$.

(c) Opět využijeme dosazení bodů do obecného vyjádření, abychom zjistili, že

$$2 - 3 = -1, \quad 3 - 2 \neq -1, \quad -1 - 1 \neq -1,$$

a proto bod $(2, 3)$ na přímce leží, zatímco body $(3, 2)$ a $(-1, 1)$ nikoli. □

1.2. Uvažujme v \mathbb{R}^2 přímkou q s obecným vyjádřením $q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 3\}$.

- (a) Určete parametrické vyjádření přímky q ,
- (b) najděte průsečík přímky q s přímkou p z předchozí úlohy,
- (c) Vyřešte v reálných číslech soustavu rovnic
$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

(a) Tentokrát známe z obecného tvaru normálový vektor $(1, 2)$ a snadno tedy určíme směrový vektor $(2, -1)$, který je na něj kolmý. Například dosazením $y = 0$ najdeme bod $(3, 0)$ přímky q , proto je

$$q = \{(3, 0) + t \cdot (2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

jedno z možných parametrických vyjádření přímky q .

(b), (c) Vidíme, že algebraické vyjádření úlohy (b) je právě úloha (c), tedy řešíme soustavu rovnic o dvou neznámých
$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$
. Nejprve některým ze známých způsobů upravíme jednu rovnici pomocí druhé tak, abychom jednu z proměnných odstranili, můžeme si vybrat metodu, kde za proměnnou v jedné rovnici dosadíme její vyjádření z druhé rovnice (dosazovací metoda) nebo metodu, kde vhodný násobek jedné rovnice odečteme ode druhé. S ohledem na pozdější úvahy, kdy budeme schopni efektivně pracovat s libovolně konečně mnoha proměnnými si zvolme odčítací metodu a odečteme od první rovnice druhou. Dostaneme rovnici $-3y = -4$, která udává jedinou možnou hodnotu neznámé $y = \frac{4}{3}$. Nyní zpětným dosazením hodnoty $y = \frac{4}{3}$ do první rovnice dostáváme $x + 2 \cdot \frac{4}{3} = 3$, odkud dopočítáme $x = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$. Hledaným průsečíkem přímek p a q je bod $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

Poznamenejme, že popsany postup můžeme také zapsat maticově (to znamená pozičně bez prepisování symbolů, x a y) pomocí matice soustavy $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$. Maticový zápis předchozích úvah bude vypadat následovně:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array} \right),$$

kde symbol \sim znamená, že soustava napravo i nalevo mají stejnou množinu řešení. □

1.3. Najděte všechna (a) reálná, (b) racionální, (c) komplexní řešení soustavy rovnic
$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x - y &= -1. \end{aligned}$$

Všechna reálná řešení jsme našli v předchozí úloze. Díky geometrickému náhledu přitom bylo zjevné, že existuje právě jedno řešení soustavy $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

Nalezené řešení je zjevně racionální, tedy jde o jediné racionální řešení. Navíc aritmetický postup z předchozí úlohy, který nezávisel na tom, zda počítáme v reálném či komplexním oboru (všechna zúčastněná čísla byla dokonce jen racionální), zajišťuje, že bod $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ je i jediným komplexním řešením dané soustavy. \square

1.4. Najděte v \mathbb{R}^2 obecné i parametrické vyjádření přímky u obsahující body $(3, -1)$ a $(2, 1)$.

Nejprve snadno určíme vektor posunutí jednoho bodu do druhého, tedy například $(1, -2) = (3, -1) - (2, 1)$. Protože známe hned dva body přímky můžeme okamžitě napsat parametrické vyjádření $u = \{(2, 1) + t \cdot (1, -2) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Obecné vyjádření získáme stejně jako v úloze 1.1 z parametrického vyjádření pomocí normálového vektoru a dosazení: $u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 5\}$ \square

1.5. Uvažujme v \mathbb{R}^3 rovinu r s obecným vyjádřením

$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1\}.$$

- (a) Určete parametrické vyjádření roviny r ,
 (b) rozhodněte, které z bodů $(1, 1, 1)$ a $(2, 2, 2)$ leží v rovině r .

(a) Postupujeme obdobně jako ve dvoudimenzionálním prostoru. Potřebujeme nejprve najít jeden bod roviny r . Pro volbu $y = z = 0$ dopočítáme z rovnice $x + y - z = 1$ hodnotu $x = 1 - 0 + 0 = 1$, tedy bod $(1, 0, 0)$ na leží na rovině r . Nyní musíme najít dva vektory určující rovinu, tedy vektory, které jsou kolmé na normálový vektor $(1, 1, -1)$ a nejsou svými násobky. Snadno určíme že vektory $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$ jsou kolmé na vektor $(1, 1, -1)$, tedy, že splňují rovnici $x + y - z = 0$. Nyní již můžeme spočítané údaje sepsat do parametrického vyjádření roviny

$$r = \{(1, 0, 0) + s \cdot (1, 0, 1) + t \cdot (0, 1, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

(b) Stejně jako v 1.1(c) prostým dosazením do obecného vyjádření zjistíme, že bod $(1, 1, 1)$ leží a bod $(2, 2, 2)$ neleží v rovině r . \square

1.6. Uvažujme v \mathbb{R}^3 rovinu v s parametrickým vyjádřením

$$v = \{(3, -1, 1) + s \cdot (1, 1, 2) + t \cdot (1, 0, -1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Určete obecné vyjádření roviny v ,
 (b) najděte parametrické vyjádření přímky dané průsečíkem roviny v s rovinou r z předchozího příkladu.

(a) Opět stačí najít normálový vektor roviny, tedy vektor (a, b, c) kolmý na vektory $(1, 1, 2)$ a $(1, 0, -1)$. Podmínku kolmosti můžeme jednoduše vyjádřit a tudíž i vyřešit v jazyce soustav rovnic:

$$\begin{aligned} 1a + 1b + 2c &= 0, \\ 1a + 0b - 1c &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je je (až na nenulový reálný násobek právě) vektor $(1, -3, 1)$. Dosadíme-li do výrazu $x - 3y + z$ bod $(3, -1, 1)$, získáme konstantu 7 a tedy hledané obecné vyjádření roviny má tvar

$$v = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 7\}.$$

- (b) Podobně jako 1.2(b) řešíme soustavu dvou rovnic tentokrát o třech neznámých:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - 3y + z &= 7 \end{aligned}$$

Zkusíme úlohu tentokrát zapsat pouze maticově a odčítací metodou upravovat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Druhou rovnicí jsme tedy nahradili rovnicí $-2y + z = 3$ tak, že soustavy mají stejnou množinu řešení. Nyní jednak po volbě $y = 0$ jednoznačně dopočítáme souřadnice bodu přímky $z = 3$ a $x = 1 - 0 + 3 = 4$ a dále najdeme směrový vektor, který musí být kolmý na normálové vektory $(1, 1, -1)$ a $(0, 2, -1)$, jímž je vektor $(1, 1, 2)$. Našli jsme parametrický popis přímky $r \cap v = \{(4, 0, 3) + t \cdot (1, 1, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$. \square

1.7. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x + y - 2z &= 5 \\2x + y - z &= 6 \\3x - 3y + 2z &= 1\end{aligned}$$

Jak lze tuto úlohu geometricky interpretovat?

Řešení. Podobně jako 1.2(b) řešíme odčítací metodou soustavu rovnic tentokrát o třech neznámých. Nejprve odečteme dvojnásobek první rovnice od druhé a trojnásobek první od třetí. Dostaneme tak novou soustavu se stejnou množinou řešení:

$$\begin{aligned}x + y - 2z &= 5 \\- y + 3z &= -4 \\- 6y + 8z &= -14\end{aligned}$$

Odečteme-li nyní od třetí rovnice šestnásobek druhé, dostaneme rovnici $-10z = 10$, z níž okamžitě vidíme, že $z = -1$. Dále postupujeme zpětným dosazením nejprve hodnoty $z = -1$ do druhé (upravené) rovnice $-y + 3 \cdot (-1) = -4$, odkud dostáváme $y = 1$ a konečně hodnoty $y = 1$ a $z = -1$ dosazené do první rovnice $x + 1 - 2 \cdot (-1) = 5$, nám dávají $x = 2$. Zjistili jsme, že soustava má jediné řešení $(x, y, z) = (2, 1, -1)$.

Geometricky můžeme úlohu chápat jako hledání průsečíku tří rovin v prostoru daných s obecným vyjádřením. Tímto průsečíkem je v našem případě bod $(2, 1, -1)$. \square

2 Řešení soustav lineárních rovnic

2.1. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 1 \\-2x + y + 2z &= 2 \\x + 3y - z &= 0\end{aligned}$$

Nejprve si soustavu zapíšeme do rozšířené matice a poté ji pomocí elementárních úprav upravujeme do odstupňovaného tvaru. Vše si budeme zapisovat pomocí maticového zápisu. Připomeňme, že soustava rovnic nalevo od symbolu \sim má stejnou množinu řešení jako soustava rovnic napravo od něj:

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1 \\-2 & 1 & 2 & 2 \\1 & 3 & -1 & 0\end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1 \\0 & 5 & 4 & 4 \\0 & 1 & -2 & -1\end{array}\right) \sim \\&\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1 \\0 & 1 & -2 & -1 \\0 & 5 & 4 & 4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1 \\0 & 1 & -2 & -1 \\0 & 0 & 14 & 9\end{array}\right)\end{aligned}$$

Druhý řádek první upravené matice, který odpovídá rovnici $5y + 4z = 4$, jsme dostali přičtením dvojnásobku rovnice $x + 2y + z = 1$ k rovnici $-2x + y + 2z = 2$ (tedy přičtením dvojnásobku řádku $(1 \ 2 \ 1 \mid 1)$ k řádku $(-2 \ 1 \ 2 \mid 2)$) a podobně třetí řádek vznikl z původního třetího řádku odečtením prvního. V dalším kroku jsme jen přehodili řádky (tedy rovnice) a poté jsme odečetli pětinašobek druhého řádku od třetího. Nyní už výsledek získáme zpětnou substitucí. Z poslední rovnice $14z = 9$ okamžitě dostáváme $z = \frac{9}{14}$ a dále dopočítáme

$$y = -1 + 2z = -1 + \frac{9}{7} = \frac{2}{7} \quad \text{a} \quad x = 1 - 2y - z = 1 - \frac{4}{7} - \frac{9}{14} = -\frac{3}{14}.$$

Vidíme, že jediné řešení soustavy je $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{9}{14} \end{pmatrix}$.

Uvědomme si, že můžeme k výsledku dospět i v maticovém zápisu, tj. můžeme levou stranu matice posloupností elementárních úprav převést až na jednotkovou matici :

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1 \\0 & 1 & -2 & -1 \\0 & 0 & 1 & \frac{9}{14}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1 \\0 & 1 & 0 & \frac{4}{14} \\0 & 0 & 1 & \frac{9}{14}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} \\0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} \\0 & 0 & 1 & \frac{9}{14}\end{array}\right).$$

\square

2.2. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -2x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Znovu si soustavu zapíšeme do matice a poté ji pomocí přičtení vhodného násobku jedné rovnice k rovnici druhé upravíme stejně jako v předchozí úloze:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right),$$

Vidíme, že se pivoty (v druhé matici vyznačeny tučně) nachází v prvním a druhém sloupci a volná proměnná je tedy z , která odpovídající třetímu sloupci. Nyní si snadno uvědomíme (a na přednášce byl tento fakt vysloven v pozorování 2.16), že dosadíme-li za z libovolnou hodnotu, pak jednoznačně dopočítáme y a x . Položíme-li například $z = 0$, pak z rovnice $5y + 4 \cdot 0 = 4$ dostáváme, že $y = \frac{4}{5}$ a z rovnice $x + 2 \cdot \frac{4}{5} + 0 = 1$ spočítáme, že $x = -\frac{3}{5}$. Našli jsme tedy jedno řešení dané soustavy, které můžeme zapsat do trojice $(x, y, z)^T = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T$. Dosadíme-li za z obecný reálný prvek t můžeme zpětnou substitucí dopočítat y :

$$5y + 4 \cdot t = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}t$$

a poté stejným způsobem i x :

$$x + 2 \cdot y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{5}t\right) - t = -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}t.$$

Obecné řešení má tedy tvar $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}t \\ \frac{4}{5} - \frac{4}{5}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ a množina všech řešení soustavy je právě $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

Na závěr si připomeňme geometrický význam řešení dané soustavy: každou z rovnic chápeme jako rovinu v \mathbb{R}^3 (tvořenou všemi trojicemi (x, y, z) , které rovnici řeší) a množina řešení celé soustavy je průnik těchto dvou rovin. Všimneme-li si navíc, že roviny zjevně nejsou rovnoběžné, musí množinu všech řešení tvořit přímka, jejíž jeden bod $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ už jsme našli a jejíž směr je dán vektorem $(3, -4, 5)$, který je právě o netriviální řešení soustav rovnic se stejnými levými a nulovými pravými stranami. Z geometrického náhledu tedy vidíme, že množin všechna řešení je přímka, kterou můžeme vyjádřit ve tvaru $\{(-\frac{3}{5} + 3t, \frac{4}{5} - 4t, 5t)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$. \square

2.3. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Soustavu si opět můžeme zapsat do matice a poté ji (jedinou elementární řádkovou úpravou) upravíme na odstupňovanou matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Nyní už snadno jednoznačně dopočítáme neznámé zpětnou substitucí. Z posledního řádku $5x_4 = 5$ dostáváme, že $x_4 = 1$, z předposledního řádku $-x_3 + 2x_4 = 0$ vidíme, že $-x_3 + 2 = 0$, tedy $x_3 = 2$. Dále z druhé rovnice $x_2 + x_3 + x_4 = 3$ obdržíme $x_2 = 0$ a konečně z rovnice $x_1 + x_2 - x_4 = 1$ dostaneme $x_1 = 2$. Vidíme, že existuje jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2, 0, 2, 1)^T$. \square

2.4. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic s maticí $a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$,

$$b) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right), \quad c) \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Ve všech případech postupujeme standardně posloupností elementárních úprav:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right), \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right),$$

Vidíme, že původní soustava je ekvivalentní se soustavou požadující rovnost $0 = 2$, tedy množina řešení je prázdná.

b)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Obdrželi jsme matici hodnosti 3 s čtvrtým volným sloupcem (pivoty jsme opět vyznačili tučně). Zvolíme-li opět za čtvrtou neznámou u parametr libovolnou reálnou hodnotu t , dopočítáme zpětnou substitucí:

$$z = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}t, \quad y = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}t, \quad x = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}t$$

Zjistili jsme, že $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ je množina všech řešení dané soustavy. Protože čtveřice

$(1, 0, 1, -1)^T$ rovněž řeší danou soustavu a vektor $(3, 1, 2, -5)$ řeší homogenní variantu naší soustavy, snadno

můžeme nahlédnout, že množinu všech řešení také můžeme popsat ve tvaru $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

c)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

Získali jsme odstupňovanou matici, v níž jsou bez pivotů 2., 4., 5. a 6. sloupec, tedy volné jsou jim odpovídající proměnné. Označíme-li si neznámé postupně x_1, \dots, x_6 , pak pro libovolná $t_2, t_4, t_5, t_6 \in \mathbb{R}$ položíme

$$x_2 = t_2, \quad x_4 = t_4, \quad x_5 = t_5, \quad x_6 = t_6$$

a zpětnou substitucí dopočítáme

$$x_3 = 1 + 2t_4 + 5t_5 - 3t_6 \text{ a poté } x_1 = 1 - t_2 - t_4 - 2t_5 + t_6.$$

Nyní obvyklým způsobem popíšeme množinu všech řešení soustavy:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mid t_2, t_4, t_5, t_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

□

2.5. Najděte všechna racionální řešení soustavy rovnic z úlohy 2.2.

Stačí si rozmyslet, že z množiny řešení úlohy 2.2 musíme vybrat ta, která jsou ve všech složkách racionální. Není těžké nahlédnout, že součin, součet i rozdíl racionálních čísel je opět racionální, proto množina $M = \{(-\frac{3}{5} + 3t, \frac{4}{5} - 4t, 5t)^T \mid t \in \mathbb{Q}\}$ jistě obsahuje racionální řešení soustavy. Protože součin, součet a rozdíl nenulového racionálního a iracionálního čísla je zjevně iracionální, obsahuje vektor $(-\frac{3}{5} + 3t, \frac{4}{5} - 4t, 5t)^T$ pro každé iracionální t iracionální hodnoty, tudíž množina M je právě množinou všech racionálních řešení soustavy. \square

2.6. Najděte v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= a \\ 2x - ay + z &= 1 \end{aligned}$$

Soustavu si nejprve napíšeme v maticovém tvaru a upravíme na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 2 & -a & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & -a-2 & -5 & 1-2a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & a+2 & 5 & 2a-1 \end{array} \right).$$

Protože levá strana poslední rovnice je vždy nenulová, má soustava pro všechna a řešení. musí jen rozlišit situaci, kdy $a+2=0$, tedy $a=-2$ a situaci, kdy $a \neq -2$.

Nechť nejprve $\mathbf{a} = -2$. Pak je y volná proměnná a řešíme soustavu s maticí:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array} \right)$$

Položíme tedy $y=0$ a dopočítáme $z=-1$ a $x=-2-3 \cdot (-1)=1$. Pro $y=1$ a dopočítáme hodnoty homogenní soustavy $z=0$ a $x=-1$, tedy množina všech řešení je tvaru $\{(1, 0, -1)^T + t(-1, 1, 0)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$

Nyní nechť $\mathbf{a} \neq -2$. Potom je volná proměnná z a řešíme soustavu s maticí:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & a+2 & 5 & 2a-1 \end{array} \right)$$

Položíme tedy $z=0$ a dopočítáme $y = \frac{2a-1}{a+2}$ a $x = a - \frac{2a-1}{a+2} = \frac{a^2+1}{a+2}$. Konečně dopočítáme-li pro $z=1$ hodnoty řešení homogenní soustavy $y = -\frac{5}{a+2}$ a $x = -(3 - \frac{5}{a+2}) = -\frac{3a+1}{a+2}$ a množina všech řešení je proto tvaru

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{a+2} \\ \frac{2a-1}{a+2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3a+1}{a+2} \\ -\frac{5}{a+2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{a+2} \\ \frac{2a-1}{a+2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 5 \\ -a-2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

\square

2.7. Vyřešte soustavy s parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right), \quad b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right).$$

Jaký mají řešení geometrický tvar? V čem se řešení pro různé hodnoty parametrů liší a v čem jsou stejná?

Řešení. Obě soustavy mají matice v odstupňovaném tvaru, proto stačí zpětnou substitucí přímočaře spočítat

$$a) \text{ parametrický popis řešení } \left\{ \begin{pmatrix} a-b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$b) \text{ bod } \begin{pmatrix} a-b+c \\ b-c \\ c \end{pmatrix}$$

Vidíme, že v úloze a) je řešením vždy přímka, jejíž směr nezávisí na parametrech a, b a v úloze b) jde vždy o bod, jehož umístění závisí na parametrech a, b, c . \square

3 Soustavy rovnic nad obecnými tělesy

3.1. Spočítejte v komplexním oboru: hodnotu výrazů $c + d$, $c \cdot d$, $\frac{1}{c}$, $\frac{c}{d}$, c^{50} pro komplexní čísla $c = 1 + i$, $d = 2 - i$ a rovnici $1 + 2i + (2 + 3i)x = 4 - i$.

Sčítání komplexních čísel je velmi snadné, reálná a komplexní hodnota se po složkách sečtou:

$$1 + i + 2 - i = 3.$$

Při násobení upravujeme výrazy s parametrem i a využíváme fakt, že $i^2 = -1$, tedy

$$(1 + i) \cdot (2 - i) = 2 - i^2 + 2i - i = 3 + i.$$

Při dělení rozšíříme zlomky komplexně sdruženou hodnotou a dostaneme

$$\frac{1}{1 + i} = \frac{1}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

a

$$\frac{1 + i}{2 - i} = \frac{1 + i}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

Při mocnění využijeme goniometrický zápis komplexních čísel a Moivreovu větu:

$$\begin{aligned} (1 + i)^{50} &= (\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}))^{50} = 2^{25}(\cos \frac{50\pi}{4} + i \sin \frac{50\pi}{4}) = \\ &= 2^{25}(\cos(6\pi + \frac{\pi}{4}) + i \sin(6\pi + \frac{\pi}{4})) = 2^{25}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 2^{25}i. \end{aligned}$$

Konečně z rovnice $1 + 2i + (2 + 3i)x = 4 - i$ dostáváme, že $(2 + 3i)x = 4 - i - (1 + 2i) = 3 - 3i$, a proto $x = \frac{3-3i}{2+3i} = \frac{3}{13}(1 - i)(2 - 3i) = -\frac{3}{13} - \frac{15}{13}i$. \square

3.2. Spočítejte v komplexním oboru soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ix + (1 + i)y &= 2 + i \\ (2 - i)x + 3y &= 5 - 4i. \end{aligned}$$

Z první rovnice si po přenásobení hodnotou $-i$ můžeme vyjádřit $x = 1 - 2i + (-1 + i)y$, které dosadíme do druhé rovnice

$$(2 - i)[1 - 2i + (-1 + i)y] + 3y = 5 - 4i,$$

tu dále upravíme na tvar $-5i + (3i - 1)y + 3y = 5 - 4i$, odkud snadno dopočítáme $(2 + 3i)y = 5 + i$, a proto $y = \frac{5+i}{2+3i} = 1 - i$. Nyní stačí dosadit vypočítané y do rovnice $x = 1 - 2i + (-1 + i)(1 - i) = 1$. \square

Sčítání a násobení v tělese $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p - 1\}$ pro prvočíslo p budeme vždy zapisovat obvyklými symboly $+$ a \cdot .

3.3. Pro přirozené p označme $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p - 1\}$ a na \mathbb{Z}_p zavedme operaci

$$a + b = (a + b) \bmod p, \quad a \cdot b = (a \cdot b) \bmod p,$$

kde v závorce uvažujeme obvyklé operace na celých číslech a $\bmod p$ znamená zbytek po celočíselném dělení číslem p . Určete tabulky operací $+$ a \cdot na \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_3 a \mathbb{Z}_5 a ukažte, že zde pro každé nenulové a existuje b , pro něž $a \cdot b = 1$.

Řešení. Tabulky operací určíme přímočarým výpočtem. Pro \mathbb{Z}_2 máme

$+$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	0	1
$\mathbf{1}$	1	0

,

\cdot	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	0	0
$\mathbf{1}$	0	1

,

$+$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$
$\mathbf{0}$	0	1	2	3	4
$\mathbf{1}$	1	2	3	4	0
$\mathbf{2}$	2	3	4	0	1
$\mathbf{3}$	3	4	0	1	2
$\mathbf{4}$	4	0	1	2	3

,

\cdot	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$
$\mathbf{0}$	0	0	0	0	0
$\mathbf{1}$	0	1	2	3	4
$\mathbf{2}$	0	2	4	1	3
$\mathbf{3}$	0	3	1	4	2
$\mathbf{4}$	0	4	3	2	1

,

pro \mathbb{Z}_3 :

$+$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{0}$	0	1	2
$\mathbf{1}$	1	2	0
$\mathbf{2}$	2	0	1

,

\cdot	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{0}$	0	0	0
$\mathbf{1}$	0	1	2
$\mathbf{2}$	0	2	1

a pro \mathbb{Z}_5 :

Na každém řádku příslušném nenulovému prvku a najdeme ve všech tabulkách násobení hodnotu 1, nachází-li se ve sloupci příslušném hodnotě b , pak $a \cdot b = 1$. \square

3.4. Najděte nad tělesem \mathbb{Z}_2 řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Uvědomíme si, že počítání v tělese obsahující jen (ve všech tělesech přítomné) prvky 0 a 1 je velmi snadné, soustavu zapíšeme do matice a s počítáním v \mathbb{Z}_2 ji budeme přímočaře upravovat posloupností elementárních úprav:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Nejprve jsme přehodili první a třetí řádek, a poté přičetli (nový) první řádek k druhému a čtvrtému. Dále jsme třetí řádek přičetli ke čtvrtému, pak druhý k třetímu a nakonec jsme zpřeházeli řádku a dostali jsme jediné řešení soustavy $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ a $x_4 = 0$.

Poznamenejme, že jsme ke stejnému výsledku mohli dospět i jinou posloupností elementárních úprav, například standardním použitím Gaussovy eliminace a zpětné substituce. \square

3.5. Spočítejte v tělesech:

- (a) \mathbb{Z}_3 hodnoty 1^{-1} , 2^{-1} a $2^{-1} \cdot (2 + 2)$,
- (b) \mathbb{Z}_5 hodnoty 2^{-1} , 3^{-1} , 4^{-1} a $(-2)^{-1} \cdot ((2 + 4) \cdot (4 + 4)^{-1}) + 3$,
- (c) \mathbb{Z}_7 hodnoty 2^{-1} , 3^{-1} , 4^{-1} , 5^{-1} , 6^{-1} a $(-2)^{-1} \cdot ((2 + 4) \cdot (4 + 4)^{-1}) + 3$,
- (d) \mathbb{Z}_p pro liché prvočíslo p hodnoty 2^{-1} a $(p - 1)^{-1}$.

(a) Stačí uvážit definice operací na \mathbb{Z}_3 (tedy modulo 3). Protože $1 \cdot 1 = 1$ a $2 \cdot 2 = 1$, dostáváme $1^{-1} = 1$ a $2^{-1} = 2$. Podobně snadno spočteme, že

$$2^{-1} \cdot (2 + 2) = 2 \cdot 1 = 2.$$

(b) Uvažujeme stejně jako v (a). Vidíme, že v \mathbb{Z}_5 máme $2 \cdot 3 = 1$, proto $2^{-1} = 3$ a $3^{-1} = 2$, a "protože $4 \cdot 4 = 1$, vidíme, že $4^{-1} = 4$. Dále

$$(-2)^{-1} \cdot ((2 + 4) \cdot (4 + 4)^{-1}) + 3 = 3^{-1} \cdot (1 \cdot 3^{-1}) + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 2.$$

(c) Podobně dostáváme nad \mathbb{Z}_7 , že $2^{-1} = 4$, $3^{-1} = 5$, $4^{-1} = 2$, $5^{-1} = 3$ a $6^{-1} = 6$, neboť $2 \cdot 4 = 3 \cdot 5 = 6 \cdot 6 = 1$ a dále

$$(-2)^{-1} \cdot ((2 + 4) \cdot (4 + 4)^{-1}) + 3 = 5^{-1} \cdot (6 \cdot 1^{-1}) + 3 = 3 \cdot 6 + 3 = 0.$$

(d) Protože je p liché, vidíme, že $\frac{p+1}{2} \in \mathbb{Z}_p$ a v tělese \mathbb{Z}_p platí, že $2 \cdot \frac{p+1}{2} = 1$, tudíž $2^{-1} = \frac{p+1}{2}$.

Víme z přednášky, že v jakémkoli tělese je $(-1) \cdot (-1) = 1$, tedy $(-1)^{-1} = (-1)$. Protože v tělese \mathbb{Z}_p máme $(p - 1) + 1 = 0$, je $p - 1$ číslo opačné k číslu 1. To znamená, že $-1 = p - 1$ a podle předchozí úvahy tedy $(p - 1)^{-1} = p - 1$. \square

3.6. Najděte v tělese \mathbb{Z}_5 :

- (a) x splňující rovnici $3x + 4 = 1$,
- (b) všechna x a y splňující rovnici $4x - 3y + 1 = 2$.

(a) Budeme způsobem, na nějž jsme zvyklí například z tělese reálných čísel upravovat rovnici ekvivalentními úpravami. Nejprve od obou stran odečteme hodnotu 4, což v \mathbb{Z}_5 znamená přičíst hodnotu 1 (vždyť $-4 = 1$) a dostaneme ekvivalentní rovnici $3x = 2$. Nyní vydělíme trojkou tj. vynásobíme číslem $\frac{1}{3} = 3^{-1} = 2$ a dostaneme jediné řešení $x = 4$.

(b) Postupujeme jako v úloze (a). Nejprve odečteme od obou stran 1 a uvědomíme si, že $-3 = 2$. Obdržíme rovnici $4x + 2y = 1$, kde vezmeme $y = s \in \mathbb{Z}_5$ libovolně a zpětnou substitucí za dalšího využití ekvivalentních úprav dopočítáme

$$4x = 1 - 2s = 1 + 3s \Rightarrow x = 4^{-1}(1 + 3s) = 4(1 + 3s) = 4 + 2s.$$

Množina všech řešení je pětiprvková tvaru

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{Z}_5 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

3.7. Najděte nad tělesem \mathbb{Z}_7 všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 5 \end{array} \right).$$

Opět upravíme rozšířenou matici soustavy na odstupňovanou matici.

a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

Protože poslední řádek představuje rovnici $0 = 5$, která neplatí pro žádný vektor neznámých, je množina všech řešení soustavy prázdná.

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Tentokrát řešení soustavy existuje a my ho obvyklým způsobem nalezneme zpětnou substitucí pro volbu za volné proměnné $x_3 = r$ a $x_4 = s$:

$$x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 + x_3 + 3x_4 = 1 + r + 3s,$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 &\Rightarrow x_1 = 3^{-1}(1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4) = \\ &= 5(1 + 6(1 + r + 3s) + 2r + 5s) = 5(r + 2s) = 5r + 3s \end{aligned}$$

Našli jsme množinu všech řešení soustavy:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{Z}_7 \right\}.$$

□

3.8. Najděte nad tělesem \mathbb{Z}_5 všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Postupujeme stejně jako v předchozích úlohách. Nejprve rozšířenou matici stejnými elementárními úpravami upravíme na odstupňovanou matici a poté najdeme všechna řešení zpětnou substitucí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Položíme za volné proměnné $x_2 = s$ a $x_5 = t$, kde $s, t \in \mathbb{Z}_5$ a obvyklým způsobem dopočítáme $x_4 = 1 + 3t$, $x_3 = 3 + 2t$ a $x_1 = 2 + 3s + t$. Nyní zbývá shrnout množinu všech dvaceti pěti řešení soustavy do množiny

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

□

3.9. Najděte nad tělesem komplexních čísel množinu všech řešení soustavy s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & i & 0 & i-1 \\ 1 & 1-i & 2 & i \end{array} \right).$$

I tentokrát nejprve převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & i & 0 & i-1 \\ 1 & 1-i & 2 & i \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & 2 & i \\ 1+i & i & 0 & i-1 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & 2 & i \\ 0 & i-2 & -2-2i & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & 2 & i \\ 0 & 5 & 2+6i & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Pro volnou proměnnou $z = t \in \mathbb{C}$ dostáváme $y = -\left(\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i\right)t$ a

$$x = i - (1-i)y - 2z = i + (1-i)\left(\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i\right)t - 2t = i + \left(-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i\right)t$$

Spočítali jsme, že množina všech řešení soustavy je právě

$$\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ -\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2+4i \\ -2-6i \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C} \right\}.$$

□

3.10. Najděte v závislosti na parametru a nad tělesem a) \mathbb{Z}_5 , b) \mathbb{Z}_7 c) \mathbb{Z}_{11} řešení soustavy rovnic z úlohy 2.6.

Stejně jako v úloze 2.6 převedeme soustavu do ekvivalentního odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 2 & -a & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & a+2 & 5 & 2a-1 \end{array} \right)$$

a provedeme obdobnou diskusi.

Nechť $\mathbf{a} = -2$. Pak je y volná proměnná a řešíme soustavu s maticí:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array} \right)$$

V případech b) a c), kdy pracujeme s tělesem charakteristiky různé od pěti je postup stejný jako v 2.6, proto je množina všech řešení opět tvaru $\{(1, 0, -1)^T + t(-1, 1, 0)^T \mid t \in \mathbf{T}\}$ pro těleso $\mathbf{T} = \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}$. V případě a), kdy pracujeme s tělesem \mathbb{Z}_5 se nám modulo 5 druhý řádek soustavy vynuluje:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Výše spočítané partikulární řešení po úpravě modulo 5 zůstává v platnosti (a bude tedy tvaru $(1, 0, 4)^T$), snadno lze ovšem také najít kanonické partikulární řešení pro nulové hodnoty obou volných proměnných $(3, 0, 0)^T$. Při výpočtu řešení homogenní soustavy máme dvě volné proměnné x_2 a x_3 . Obvyklým postupem nyní najdeme nad \mathbb{Z}_5 dvě řešení $(4, 1, 0)^T$ a $(2, 0, 1)^T$ (jednočlenné) homogenní soustavy, všechna řešení jsou tedy tvaru

$$(1, 0, 4)^T + t \cdot (4, 1, 0)^T + s \cdot (2, 0, 1)^T \quad \text{pro } s, t \in \mathbb{Z}_5.$$

Zjistili jsme, že všechna řešení tvoří pro $a = -2$ množina:

$$\text{a)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5 \right\},$$

$$\text{b)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_7 \right\}, \quad \text{c)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_{11} \right\}.$$

V případě $a \neq -2$, je volná proměnná z a stačí využít výsledky úlohy 2.6:

$$\text{a)} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{a+2} \\ \frac{2a+4}{a+2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 0 \\ 4a+3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}, \quad \text{b)} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{a+2} \\ \frac{2a+6}{a+2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 5 \\ 6a+5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_7 \right\},$$

$$\text{c)} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{a+2} \\ \frac{2a-1}{a+2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 5 \\ 10a+9 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_{11} \right\}$$

Závěrem poznamenejme, že symbol $\frac{c}{d}$ je v tělese \mathbb{Z}_p výraz, který je třeba dopočítat, tedy že $\frac{c}{d} = c \cdot d^{-1}$. \square

4 Počítání s maticemi

4.1. Uvažujme matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{R} , \mathbb{Z}_7 a \mathbb{Z}_{11} .

- Spočítejte součty $B + C$, $C + B$, $B^T + C^T$.
- Spočítejte součiny $A \cdot B$, $B^T \cdot A^T$, $B^T \cdot A$, $B^T \cdot C$, $C^T \cdot B$ a $5 \cdot C$.
- Spočítejte $A \cdot (A - B \cdot C^T) + (C \cdot B^T \cdot A^T)^T - A$.

Ve všech případech úlohu vyřešíme nejprve v tělese charakteristiky 0, tedy v reálných číslech a poté, obdobně jako tomu bylo v Příkladu 2.6 výsledek pouze upravíme modulu příslušné prvočíslo.

(a) Postupujeme nejprve přímo podle definice součtu matic:

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+2 & -1+0 \\ 1+3 & 2+5 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Na přednášce bylo ukázáno, že je sčítání matic komutativní, nemusíme samozřejmě druhý součet počítat a přímo vidíme, že $C + B = B + C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ nad \mathbb{R} a

$$C + B = B + C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7 \text{ a } C + B = B + C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{11}.$$

Podobně bylo na přednášce ověřeno, že $B^T + C^T = (B + C)^T$, tedy nám stačí jen bez dalšího počítání transponovat matici $B + C$, abychom dostali $B^T + C^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel,

$$B^T + C^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \quad \text{a } B^T + C^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{11}.$$

(b) Opět nejprve postupujeme bezprostředně podle definice, tentokrát se jedná o definici násobení matic: $A \cdot B =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 & -3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Protože bylo na přednášce ověřeno, že $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, vidíme, že

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

To nám ovšem nepomůže pro výpočet $B^T \cdot A$, který opět provedeme podle definice:

$$B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Při výpočtu součinu $B^T \cdot C$ nám pomůže rozklad matice C na dva bloky $C = (A|\mathbf{S})$, kde A je matice s kterou pracujeme a $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Výpočet nám usnadní jednak to, že jsme již spočítali součin $B^T \cdot A$ a dále pozorování, že součin $B^T \cdot \mathbf{S}$ právě vybere z matice B^T druhý sloupec:

$$B^T \cdot C = (B^T \cdot A | B^T \cdot \mathbf{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konečně $C^T \cdot B = C^T \cdot (B^T)^T = (B^T \cdot C)^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a

$$5 \cdot C = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 5 & 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 15 & 25 & 5 \end{pmatrix}.$$

Našli jsme výsledky v tělese reálných čísel a nyní je upravíme nad oběma konečnými tělesy:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^T \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

a $C^T \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $5 \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ vše nad tělesem \mathbb{Z}_7 . Obdobně

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^T \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$C^T \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $5 \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ vše nad tělesem \mathbb{Z}_{11} .

(c) Využijeme početních pravidel a nejprve upravíme:

$$\begin{aligned} A \cdot (A - B \cdot C^T) + (C \cdot B^T \cdot A^T)^T - A &= A \cdot A - A \cdot B \cdot C^T + (A^T)^T \cdot (B^T)^T \cdot C^T - A = \\ &= A \cdot (A - I_2) - A \cdot B \cdot C^T + A \cdot B \cdot C^T = A \cdot (A - I_2). \end{aligned}$$

Nyní snadno dopočítáme

$$A \cdot (A - I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{R}$$

$$A \cdot (A - I_2) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \quad \text{a} \quad A \cdot (A - I_2) = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{11}.$$

□

4.2. Najděte nad tělesem \mathbb{Z}_7 všechny matice \mathbf{X} splňující rovnost $A \cdot \mathbf{X} = B$, jestliže

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(a) Hledaná matice \mathbf{X} musí být zřejmě typu 2×2 tvaru $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pro dva sloupcové vektory, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_7^2$. Užitím definice násobení matic snadno nahlédneme, že pro \mathbf{X} platí, že splňuje rovnost $A \cdot \mathbf{X} = B$, právě tehdy když

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Protože mají obě soustavy touž matici levých stran, můžeme soustavy zapsat do jedné matice s oběma vektory pravých stran vpravo a levé strany upravíme posloupností elementárních úprav na odstupňovanou matici:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Dostali jsme tedy dvě soustavy s rozšířenými maticemi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{a} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nyní snadno obvyklým způsobem dopočítáme, že první soustavu řeší právě vektory $c \cdot (4, 1)^T$ pro všechna $c \in \mathbb{Z}_7$ druhou soustavu řeší právě vektory $(2, 0)^T + d \cdot (4, 1)^T$ pro všechna $d \in \mathbb{Z}_7$. Zbývá všechna řešení soustav sepsat do řešení maticové rovnice. Tedy \mathbf{X} je řešením maticové rovnice $A \cdot \mathbf{X} = B$, právě když \mathbf{X} leží v množině $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \exists c, d \in \mathbb{Z}_7 : \mathbf{x} = c \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 4c & 2 + 4d \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{Z}_7 \right\}.$$

(b) I tentokrát nejprve snadno zjistíme, že hledaná matice je typu 2×3 , sestává ze tří sloupcových vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_7^2$ tak, že $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ a platí

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stejně jako v (a) budeme hledat řešení všech soustav najednou:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 5 & & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & & 4 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & & 4 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & & 4 & 3 & 6 \end{array} \right).$$

Matici levých stran se nám postupně podařilo upravit na jednotkovou matici, z níž okamžitě odečteme řešení jednotlivých neznámých:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že existuje právě jedno řešení rovnice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. □

4.3. Uvažujme matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{Z}_5 a definujme zobrazení $f_A : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ a $f_B : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ předpisy $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ a $f_B(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$

- (a) Rozhodněte, zda je f_A či f_B prosté zobrazení.
- (b) Rozhodněte, zda je f_A či f_B zobrazení na.
- (c) Najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$, pro něž je $f_B(\mathbf{v}) = (0, 0)^T$
- (d) Najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$, pro něž je $f_B(\mathbf{v}) = (1, 2)^T$

(a) Připomeňme, že je zobrazení f_A prosté, jestliže $f_A(\mathbf{u}) = f_A(\mathbf{v}) \implies \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Protože $f_A(\mathbf{u}) = f_A(\mathbf{v})$, právě když $f_A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = f_A(\mathbf{u}) - f_A(\mathbf{v}) = 0$, lze ekvivalentně prostotu zobrazení f_A vyjádřit podmínkou $f_A(\mathbf{u}) = 0 \implies \mathbf{u} = 0$. Tedy nám stačí zjistit, zda mají soustavy rovnic $A\mathbf{x} = (0, 0)^T$ a $B\mathbf{x} = (0, 0)^T$ nějaké nenulové řešení. V obou případech po jediné ekvivalentní úpravě vidíme, že nenulové řešení existují, v prvním případě například $f_A((3, 1)^T) = (0, 0)^T = f_A((0, 0)^T)$ a v druhém případě například $f_B((4, 1, 1)^T) = (0, 0)^T = f_B((0, 0, 0)^T)$, proto zobrazení f_A ani f_B není podle definice prosté.

(b) Opět se úloha redukuje na otázku řešení soustavy rovnic s danou maticí. Tentokrát se ptáme, zda pro každou pravou stranu existuje řešení. V prvním případě vidíme, že nikoli, například pro pravou stranu $(1, 0)^T$ vidíme, že řešení soustavy $A\mathbf{x} = (1, 0)^T$ neexistuje. V druhém případě vidíme, že odstupňovaný tvar matice B nemá žádný nulový řádek, tedy pivoty každé soustavy s maticí levých stran B leží v části matice odpovídající levým stranám, proto řešení vždy existuje. Tedy f_A není na, zatímco f_B je zobrazení na \mathbb{Z}_5^2 .

(c) Stačí, abychom obvyklým způsobem vyřešili homogenní soustavu rovnic s maticí

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Obvyklým způsobem zjistíme, že vektor \mathbf{v} splňuje $f_B(\mathbf{v}) = (0, 0)^T$, právě když leží v množině $\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

(d) Tentokrát standardně řešíme soustavu rovnic tvaru $B\mathbf{x} = (1, 2)^T$ s maticovým zápisem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right).$$

Spočítáme jedno partikulární řešení $(1, 1, 0)^T$ a využijeme výsledku (c), vidíme, že \mathbf{v} splňuje $f_B(\mathbf{v}) = (0, 0)^T$, právě když leží v množině $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$. □

4.4. Definujme zobrazení $f_A : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ předpisem $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ pro racionální matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Spočítejte jádro matice A ,
- (b) dokažte, že je f_A bijekce,
- (c) existuje-li, najděte racionální matici \mathbf{X} , pro níž $A\mathbf{X} = I_2$,
- (d) existuje-li, najděte matici B , pro níž platí $f_B \circ f_A = f_A \circ f_B = \text{Id}$, tedy $f_B = f_A^{-1}$, kde je f_B definováno předpisem $f_B(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$.
- (e) spočítejte součin $\mathbf{X} \cdot A$.

(a) Jádro matice je právě množina všech řešení homogenní soustavy rovnic s danou maticí, tj. $\text{Ker } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^2 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Standardním postupem v jediném kroku upravíme matici A na odstupňovanou

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a vidíme, že matice levých stran neobsahuje žádný sloupec odpovídající volné proměnné, tudíž jediné řešení soustavy je triviální a $\text{Ker } A = \{\mathbf{0}\}$.

(b) Máme dokázat, že je zobrazení dané maticí A prosté a na, tedy máme ukázat, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^2$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^2$, pro který $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{v}$. Opět tedy řešíme soustavy rovnic. Uvědomíme-li si, že podle Věty 4.33 z přednášky je každé řešení soustavy rovnic s maticí A tvaru $\mathbf{u} + \text{Ker } A$ pro nějaké partikulární řešení, stačí pro ověření prostoty zobrazení zjistit, zda je jádro $\text{Ker } A$ jednoprvkové. To jsme ovšem už spočítali v úloze (a). Navíc jsme v (a) zjistili, že odstupňovaný tvar matice A neobsahuje žádný nulový řádek, tedy pro každou pravou stranu \mathbf{v} umíme soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ vyřešit. Tím máme ověřeno, že je zobrazení f_A prosté i na.

(c) Budeme postupovat stejně jako v úloze 4.2, tj. řešíme dvě soustavy rovnic se stejnou maticí levých stran

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a hledanou maticí (existují-li obě řešení) sestavíme ze sloupců $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Obě soustavy přitom upravujeme společně v jedné rozšířené matici.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right).$$

Postupně jsme odčítali druhý řádek od prvního, přičítali trojnásobek prvního řádku ke druhému, vynásobili první řádek hodnotou -1 a odečetli druhý řádek od prvního, abychom zjistili, že $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Všimněme si, že upravením levé strany matice na jednotkovou znamená, že už nemusíme dopočítávat sloupce matice \mathbf{X} , protože se na levé straně upravené matice hledaná matice \mathbf{X} objeví.

(d) Využitím definice zobrazení f_A a f_B pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^2$ dostaneme

$$f_A \circ f_B(\mathbf{v}) = f_A(B \cdot \mathbf{v}) = A \cdot B \cdot \mathbf{v}.$$

položíme-li tedy $B = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, tj. vezmeme matici nalezenou v úloze (c), obdržíme pro každé $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^2$

$$f_A \circ f_B(\mathbf{v}) = A \cdot (\mathbf{X} \cdot \mathbf{v}) = (A \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{v} = I_2 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Tím jsme dokázali, že $f_A \circ f_B = \text{Id}$. Protože je f_A bijekce, víme že existuje f_A^{-1} , proto

$$f_A^{-1} = f_A^{-1} \circ \text{Id} = f_A^{-1} \circ (f_A \circ f_B) = (f_A^{-1} \circ f_A) \circ f_B = \text{Id} \circ f_B = f_B,$$

proto i $f_B \circ f_A = \text{Id}$.

(e) Přímým výpočtem lze snadno zjistit, že $\mathbf{X} \cdot A = I_2$. Stejný závěr ovšem plyne také z pozorování úlohy (d), že $f_B \circ f_A = \text{Id}$. \square

4.5. Uvažujme matici B z úlohy 4.3.

(a) Najděte všechny matice \mathbf{X} nad \mathbb{Z}_5 , pro níž $B\mathbf{X} = I_2$,

(b) najděte všechny matice \mathbf{Y} nad \mathbb{Z}_5 , pro níž $\mathbf{Y}B = I_3$.

(a) Postupujeme obdobně jako v předchozí úloze. Nejprve řešíme soustavy rovnic se společnou maticí levých stran $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 \end{array} \right).$$

Zpětnou substitucí pro hodnotu třetí proměnné 0 získáme dvě partikulární řešení soustav, které umístíme do sloupců matice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Využijeme-li jádro

$$\text{Ker } B = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

nalezené v úloze 4.3, snadno popíšeme množinu všech matic \mathbf{X} splňující $B\mathbf{X} = I_2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4s & 4t \\ s & t \\ s & t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4s+1 & 4t \\ s+4 & t+1 \\ s & t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

(b) Tentokrát můžeme buď pomocí transpozice a řešení soustav rovnic přímočaře, byť poněkud těžkopádně spočítat, že požadované matice \mathbf{Y} žádná neexistuje, nebo lze zopakovat úvahu úlohy 4.4(d). Kdyby totiž matice \mathbf{Y} existovala, muselo by pro indukované zobrazení $f_{\mathbf{Y}}$ platit, že $f_{\mathbf{Y}} \circ f_B = \text{Id}$. Zobrazení f_B ovšem není prosté, tedy žádné zobrazení g splňující $g \circ f_B = \text{Id}$ nemůže existovat, tedy množina všech matic \mathbf{Y} je prázdná \square

4.6. Existuje-li, najděte matici \mathbf{X} splňující

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = I_3$ nad tělesem racionálních čísel,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = I_2$ nad tělesem \mathbb{Z}_5 ,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = I_4$ nad tělesem \mathbb{Z}_2 .

(a) Počítáme obdobně jako v úloze 4.4:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Vidíme, že $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 5 \\ 8 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Opět upravujeme řádky rozšířené matice nad tělesem \mathbb{Z}_5 :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Postupně jsme 1) přičetli 1. řádek ke 2. (protože $-3 = 2$ v \mathbb{Z}_5), 2) vynásobili 1. řádek číslem 3 a 2. řádek číslem 2 (protože $2^{-1} = 3$ a $3^{-1} = 2$ v \mathbb{Z}_5), 3) odečetli 2. řádek od 1. nebo ekvivalentně řečeno přičetli 4-násobek 2. řádku k 1. (protože $-4 = 1$ v \mathbb{Z}_5).

Nyní vidíme, že $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{Z}_5 .

(c) Postupujeme standardně, přičemž nejprve přičteme všechny níže položené řádky k prvnímu a poté první řádek přičteme k níže položeným řádkům:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Spočítali jsme, že $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

4.7. Rozhodněte, které z následujících matic jsou regulární. K regulárním maticím najděte jejich inverzní matice.

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ nad tělesem racionálních čísel,

(b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel a nad tělesem \mathbb{Z}_5 ,

(c) $D = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 3-i \end{pmatrix}$ nad tělesem komplexních čísel.

(d) $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{Z}_7 ,

(e) G^T nad tělesem \mathbb{Z}_7

Potřebujeme nejprve zjistit, zda odstupňovaná matice každé ze uvedených čtvercových matic obsahuje či neobsahuje nulový řádek. V prvním případě jde o singulární a v druhém o regulární matici. Inverzní matice potom počítáme stejně jako v příkladu 4.6.

(a) Jedinou úpravou dostaneme $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tudíž matice B není regulární.

(b) Opět jedinou elementární úpravou dostaneme, že $C \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel, což znamená, že je matice regulární. Nad tělesem \mathbb{Z}_5 matici upravíme modulo 5, tedy $C \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a matice C je nad \mathbb{Z}_5 singulární. Zbývá najít inverzní matici C nad \mathbb{R} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right) \sim$$

Dostali jsme, že $C^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Postupujeme jako v (b) s využitím aritmetiky komplexních čísel, během výpočtu přitom zjistíme, že inverz existuje:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3-i & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1+i & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{i-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1-2i}{2} & \frac{i-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{i-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Spočítali jsme, že $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{2} & \frac{i-1}{2} \\ \frac{i-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2-4i & i-1 \\ 2i-2 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) Počítáme tentokrát nad \mathbb{Z}_7 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 2 \end{array} \right).$$

Dostali jsme $G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) Tentokrát pouze využijeme předchozí výsledek a tvrzení z přednášky, které říká, že $(G^T)^{-1} = (G^{-1})^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. □

4.8. Napište všechny regulární matice z předchozí úlohy jako součin elementárních matic.

Využijeme postup důkazu Věty 4.66. Stačí nám tedy zaznamenat inverzní elementární úpravy k těm, které jsme prováděli při převodu matice na inverzní, do elementárních matic:

Matici $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel jsme převedli na jednotkovou tak, že jsme nejprve odečetli trojnásobek prvního řádku k druhému, poté vydělili druhý řádek číslem -5 a nakonec odečetli dvojnásobek druhého řádku od prvního. To znamená, že

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

proto hledané elementární matice dostáváme přenásobením rovnosti zleva příslušnými inverzními elementárními maticemi, které jsou samozřejmě také elementární:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

V případě matice $D = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 3-i \end{pmatrix}$ nad tělesem komplexních čísel jsme postupně upravovali: 1) $(1-i)$ -násobek prvního řádku jsme odečetli od druhého, 2) prvního řádku jsme vynásobili hodnotou $\frac{1}{1+i}$ a druhý

řádek hodnotou $\frac{1}{2} \cdot 3$) $\frac{1-i}{2}$ -násobek druhého řádku jsme odečetli od prvního. Nyní zbývá elementární matice opačných elementárních úprav sepsat do matic

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně pro matici $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{Z}_7 stačí zaznamenat provedené elementární úpravy do inverzních elementárních matic $G =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konečně pro matici transponovanou ke G stačí transponovat celý součin elementárních matic, tedy $G^T =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

4.9. Rozhodněte, pro která a z tělesa je matice A_a regulární a pro tato a spočítejte matici A_a^{-1} .

- (a) $A_a = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{Z}_7 ,
- (b) $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2a-1 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{Q} ,
- (c) $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{Z}_5 .

Budeme obvyklým způsobem počítat inverzní matice a přitom zároveň provedeme diskusi, pro která a inverzní matice existuje.

(a)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & a & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & a & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & a & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Vidíme, že A_a regulární, právě když $a \neq 0$ a tehdy $A_a^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ a^{-1} & 4a^{-1} \end{pmatrix}$.

(b) Postupujeme stejně jako v (a):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 2a-1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 2a-1-a^2 & -a & 1 \end{array} \right)$$

Tentokrát je zřejmě matice A_a regulární, právě když $2a-1-a^2 = -(a-1)^2 \neq 0$, tedy právě když $a \neq 1$. Pro $a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ pokračujeme v úpravách:

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a}{(a-1)^2} & \frac{-1}{(a-1)^2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1-2a}{(a-1)^2} & \frac{a}{(a-1)^2} \\ 0 & 1 & \frac{a}{(a-1)^2} & \frac{-1}{(a-1)^2} \end{array} \right)$$

Zjistili jsme, že $A_a^{-1} = \frac{1}{(a-1)^2} \begin{pmatrix} 1-2a & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Nejprve si všimněme, že pro $a = 0$ je poslední sloupec matice nulový, tedy matice A_0 je singulární. Dále uvažujeme jen $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & | & 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4a^2 & | & 1 & 4a & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4a^2 & | & 1 & 4a+3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a^{-1} & 3a^{-1} & 2a^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4a^2 & | & 1 & 4a+3 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Nyní snadno dopočítáme, že $A_a^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 3a^{-1} & 2a^{-1} \\ 0 & 2 & 3 \\ \frac{4}{a^2} & \frac{a+2}{a^2} & \frac{3}{a^2} \end{pmatrix}$ pro $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$. □

4.10. Spočítejte součiny reálných matic

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

(a) Označme $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Rozšíříme-li matici A o matici B a budeme-li vzniklou matici $(A|B)$ upravovat stejně jako v předchozích úlohách takovými elementárními úpravami, abychom vlevo obdrželi jednotkovou matici, snadno nahlédneme, že

$$(A|B) \sim A^{-1} \cdot (A|B) = (I_2|A^{-1}B),$$

Tedy vpravo dostaneme hledaný součin $A^{-1}B$. Počítejme:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 5 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Spočítali jsme, že $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 & 7 \\ -3 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. □

(b) Označme $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Využijeme-li Tvzení 4.20 a 4.65, dostaneme $(C \cdot D^{-1})^T =$

$(D^{-1})^T \cdot C^T = (D^T)^{-1} \cdot C^T$, a proto můžeme postupovat stejným způsobem jako v bodu (a), ovšem pro součin transponovaných matic v obráceném pořadí:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 12 & 8 & 8 & -4 & 4 \\ 12 & 9 & 0 & 9 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 0 & 18 & -27 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že $(D^T)^{-1} \cdot C^T = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 \\ -8 & 13 & 2 \end{pmatrix}$, a proto $C \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -9 & 13 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. □

4.11. Existuje-li, najděte LU rozklad reálné matice:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad (b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad (c) C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(d) D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Všimněme si, že stačí provést jedinou elementární úpravu třetího typu, abychom z matice A dostali odstupňovanou matici $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, což můžeme zapsat v maticové podobě pomocí násobení zleva příslušnou elementární maticí:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Uvědomíme-li si, že inverzní matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ je rovněž dolní trojúhelníková s jednotkami na

diagonále a přenásobíme-li výše uvedenou rovnost zleva maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix},$$

odkud vidíme, že LU rozklad matice A je $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) I tentokrát budeme matici B upravovat elementárními úpravami. Příslušné úpravy si budeme pamatovat a poté si je přepíšeme v maticovém zápisu jako součin elementárních matic:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = U.$$

Při upravování jsme nepotřebovali přehazovat řádky (ani násobit řádek nenulovým skalárem), tedy dostali jsme $L_k \dots L_1 B = U$, kde L_i jsou všechno elementární transformační matice odpovídající přičtení výše položeného řádku k řádku níže položenému:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

Matice L_i jsou zřejmě dolní trojúhelníkové s jednotkami na diagonále a okamžitě vidíme, že součin $L = L_1^{-1} \dots L_k^{-1}$ rovněž dolní trojúhelníková matice s jednotkami na diagonále. Navíc $B = LU$. Tedy jsme našli LU rozklad matice B . Vidíme, že součin matic $L_1^{-1} \dots L_k^{-1}$ obsahuje na příslušných pozicích hodnoty jednotlivých elementárních matic (tj. i -tý řádek a j -tý sloupec, $i > j$, obsahuje hodnotu c_{ij} , právě když jsme během Gaussovy eliminace odečítali od i -tého řádku matice B a c_{ij} -násobek jejího j -tého řádku):

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Našli jsme tedy (jednoznačně určený) LU rozklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že výsledná matice L obsahuje na i -tém řádku a j -tém sloupci právě opačnou hodnotu k násobku, jímž jsme násobili j -tý řádek při jeho přičítání k i -tému sloupci během elementárních úprav (tedy během Gaussovy eliminace). To, že se jedná o obecný způsob, jak nalézt dolní trojúhelníkovou matici LU rozkladu matice ukazuje důkazu Věty 4.69 z přednášky a na témže místě je ukázáno, že horní trojúhelníková matice LU rozkladu je právě odstupňovaná matice, kterou získáme Gaussovou eliminací.

(c) Tentokrát budeme postupovat jako v důkazu Věty 4.69, tedy stačí gaussovsky upravovat matici C a příslušné (opačné) hodnoty sestavovat do matice L :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

kde jsme postupně odečetli 1) -1 -násobek 1. řádku od 2., 2) 1 -násobek 1. řádku od 3. a 3) 2 -násobek 2. řádku od 3. Tedy dostáváme tedy LU rozklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Opět upravujeme Gaussovou eliminací matici D :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Provedené úpravy zaznamenáme do matice L a dostaneme hledaný LU rozklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

4.12. Pomocí LU rozkladu reálné matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ spočítejte všechna řešení soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ pro vektor pravých stran $\mathbf{y} = (-3, 2, -1)^T$.

Máme-li LU rozklad matice $A = LU$ a uvažujeme-li nehomogenní soustavu rovnic $\mathbf{Ax}^T = \mathbf{y}^T$, potom můžeme úlohu rozdělit na dva jednodušší úkoly, najít nejprve řešení soustavy $L\mathbf{z}^T = \mathbf{y}^T$ a poté soustavy $U\mathbf{x}^T = \mathbf{z}^T$. V obou případech počítáme s trojúhelníkovými maticemi, takže při výpočtu už jen dosazujeme, aniž musíme matice jakkoli dále gaussovsky upravovat.

LU rozklad matice jsme už spočítali: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Potom pro vektor pravých stran $\mathbf{y} = (-3, 2, -1)$ spočítáme neznámé $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ přímou substitucí $z_1 = y_1 = -3$, dále $-1z_1 + z_2 = 3 + z_2 = y_2 = 2$, tedy $z_2 = -1$ a konečně $z_3 = -1 - 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) = 4$.

Nyní počítáme soustavu $U\mathbf{x}^T = \mathbf{z}^T$ a tentokrát tedy postupujeme zpětnou substitucí: $2x_3 = z_3$, tedy $x_3 = 2$, dále $x_2 = \frac{-1 - 1 \cdot 2}{3} = -1$ a $x_1 = \frac{-3 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2}{2} = 1$. \square

4.13. Existuje-li, najděte LU rozklad matic:

- (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbf{Z}_5 , (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbf{Z}_5 ,
(c) B nad tělesem \mathbf{Z}_7 ,

Postupujeme v 4.11 s počítáním v tělesech \mathbf{Z}_5 a \mathbf{Z}_7 , tedy gaussovsky upravíme matici na matici U a příslušné hodnoty sepíšeme do matice L :

- (a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a dostáváme LU rozklad $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítali jsme LU rozklad matice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbf{Z}_5 .

(c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítali jsme nad \mathbf{Z}_7 LU rozklad matice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. \square

4.14. Pro reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ověřte, že nemá LU-rozklad, najděte permutační matici P tak, aby matice PA měla LU rozklad a ten spočítejte.

Budeme matici postupně upravovat Gaussovou eliminací, tj. budeme kanonickým způsobem, používat pouze přehazování řádků a přičítání násobku výše položeného k níže položenému řádku. Oba typy úprav budeme zaznamenávat (pravý sloupec jen čísluje řádky):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

Tedy permutační matice, kterou potřebujeme změnit původní matici A , odpovídá permutaci řádků zachycené

v pravém sloupci, čili $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Původním transformacím typu přičtení výše položeného řádku

k níže položenému odpovídala matice $L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, my ale musíme adekvátně matici P , jako jsme

to udělali i v průběhu důkazu Věty 5.4, změnit polohu upravovaných řádků, takže dostáváme LU rozklad matice PA :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

4.15. Existuje-li, najděte nad tělesem \mathbb{Z}_3 všechny matice \mathbf{X} splňující

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = I_2$,

(b) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I_3$.

(a) Počítáme obdobně jako v úlohách 4.2 a 4.6:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Nyní zpětnou substitucí snadno zjistíme, že $\mathbf{X} \in \left\{ \begin{pmatrix} 2+2s & 2+2t \\ 1 & 2 \\ s & t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

(b) Nyní buď můžeme zjistit, že hledaná matice \mathbf{X} neexistuje, stejnými prostředky jako v předchozí úloze, nebo si všimneme, že otázka je ekvivalentní podmínce

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in f_{A^T}(\mathbb{Z}_3^2)$$

kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a zobrazení $f_{A^T} : \mathbb{Z}_3^2 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3$ je dáno předpisem $f_{A^T}(\mathbf{v}) = A^T \mathbf{v}$. Ovšem $f_{A^T}(\mathbb{Z}_3^2)$ je právě řádkový vektorový prostor matice A , tedy má (nejvýše) devět prvků, zatímco podprostor, který by obsahoval všechny vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ by musel obsahovat všechny jejich lineární kombinace, tedy všechny vektory vektorového prostoru \mathbb{Z}_3^3 , tedy 27 různých vektorů, což není možné. Požadovaná matice tudíž neexistuje. □

4.16. Najděte čtvercovou matici A nad tělesem T řádu n splňující podmínky $A^2 = I_n$ a $A \neq I_n$, jestliže

(a) $n = 1$ a $T = \mathbb{R}$,

(b) $n = 2$ a $T = \mathbb{R}$,

(c) $n = 2$ a $T = \mathbb{Z}_5$,

(d) $n = 3$ a $T = \mathbb{R}$,

(e) $n = 4$ a $T = \mathbb{Z}_2$.

(a) Čtvercové matice řádu 1 odpovídají prvkům těles, tedy se ptáme, kdy $a^2 = 1$ a $a \neq 1$ nad reálnými čísly. Okamžitě vidíme, že podmínku splňuje pouze matice (-1) .

(b) V úloze nám může pomoci geometrický náhled. Uvážíme-li matici zobrazení f_A , hledáme taková zobrazení, která jsou sama k sobě inverzní. Ta ovšem snadno najdeme mezi symetriemi, například osová

souměrnost podle osy x či y nebo souměrnost podle průsečíku os jsou zobrazení sama k sobě inverzní. Nyní stačí nahlédnout, že $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je maticí souměrnosti podle osy x , $A_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je maticí souměrnosti podle osy y a $A_o = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je maticí souměrnosti podle počátku souřadnic, a že $A_x^2 = A_y^2 = A_o^2 = I_2$.

(c) V tomto případě nám sice geometrická představa chybí, ale algebraické důvody ukazují, že předchozí příklady matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

i nad tělesem \mathbb{Z}_5 splňují podmínku $A^2 = I_2$. Poznamenejme ovšem, že existují i další matice splňující $A^2 = I_2$ například matice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) Tentokrát můžeme použít geometrickou úvahu z (b), abychom si uvědomili, že osové souměrnosti s maticemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

symetrie podle rovin určených dvojicí os s maticemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

stejně jako středová symetrie s maticí $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ naši podmínku splňují.

(e) Nad tělesem \mathbb{Z}_2 platí, že $-1 = 1$, tedy úvahu z (b) využít nemůžeme. Přesto například matice $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ z úlohy 4.7(h) podmínku $H^2 = I_4$ splňuje. □

4.17. Najděte aspoň 4 reálné čtvercové matice A řádu 3, aby $A^2 = A$ a $A \neq I_3$.

Podobně jako v předchozí úloze může využít geometrického náhledu. Uvážíme-li matici zobrazení f_A , hledáme geometrická zobrazení, která se dvojnásobnou aplikací nezmění. Takovou podmínku splňují jistě kolmé projekce na rovinu či přímku, matice projekcí na rovinu určenou dvojicí os jsou potom tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

zatímco matice projekcí na osy jsou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

4.18. Mějme reálnou matici $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ řádu $n > 1$. Najděte příklady (nekonečně mnoha) matic, které s M komutují.

Uvědomíme-li si, že je skalární násobení komutativní, dostaneme třídu matic $cI_2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ pro c , které zřejmě komutují se všemi maticemi. Dále připomeňme, že $M \cdot dM^{-1} = cI_2 = dM^{-1} \cdot M$. Tedy matice dM^{-1} pro každé $d \in \mathbb{R}$ komutuje s M , vezmeme-li $c = 6d$ snadno spočítáme, že s M komutují matice $\begin{pmatrix} 3c & 0 \\ -c & 2c \end{pmatrix}$ pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Dále pro každé přirozené n máme $M \cdot M^n = M^{n+1} = M^n \cdot M$ a $M \cdot (M^{-1})^n = (M^{-1})^{n-1} = (M^{-1})^n \cdot M$, tedy matice M^n i $(M^{-1})^n$ s M komutují. \square

Připomeňme, že *Jordanova buňka* je matice tvaru $\mathbf{J}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

4.19. Je-li \mathbf{J}_λ Jordanova buňka řádu n nad obecným tělesem, dokažte, že

$$\mathbf{J}_\lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix},$$

kde definitoricky položíme $\binom{k}{r}\lambda^{k-r} = 0$ pro $r > k$.

Postupujeme indukcí. Pro $k = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že vzorec platí pro k a dokažme ho pro $k + 1$. Budeme násobit $\mathbf{J}_\lambda^{k+1} = \mathbf{J}_\lambda \cdot \mathbf{J}_\lambda^k =$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & ((\binom{k}{1}) + 1)\lambda^k & ((\binom{k}{2}) + \binom{k}{1})\lambda^{k-1} & \dots & ((\binom{k}{n-1}) + \binom{k}{n-2})\lambda^{k-n+2} \\ 0 & \lambda^{k+1} & ((\binom{k}{1}) + 1)\lambda^k & \dots & ((\binom{k}{n-2}) + \binom{k}{n-3})\lambda^{k-n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{k+1} & ((\binom{k}{1}) + 1)\lambda^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & \binom{k+1}{1}\lambda^k & \binom{k+1}{2}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k+1}{n-1}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & \lambda^{k+1} & \binom{k+1}{1}\lambda^k & \dots & \binom{k+1}{n-2}\lambda^{k-n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{k+1} & \binom{k+1}{1}\lambda^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde jsme využili známého vztahu $\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} = \binom{k+1}{r}$. \square

4.20. Spočítejte A^n pro

(a) $n = 45$ a $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{R} ,

(b) $n = 45$ a $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{R} ,

(c) $n = 13$ a $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{Z}_{13} .

(a) Použijeme vzorečku odvozeného v úloze 4.19:

$$A^{45} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{45} = \begin{pmatrix} 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} & 990 \cdot 3^{43} \\ 0 & 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} \\ 0 & 0 & 3^{45} \end{pmatrix}$$

(b) Všimněme si, že $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, proto

$$A^{45} = \frac{1}{3^{45}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{45} = \frac{1}{3^{45}} \cdot \begin{pmatrix} 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} & 990 \cdot 3^{43} \\ 0 & 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} \\ 0 & 0 & 3^{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 110 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Uvědomíme-li si, že pro každé prvočíslo p a přirozené číslo $r \leq p$ je nad tělesem \mathbb{Z}_p hodnota kombinačního čísla $\binom{p}{r} = \frac{p!}{r!(p-r)!} \equiv 0 \pmod{p}$ a spočítáme-li $8^{13} \equiv 8 \pmod{13}$ (Malá Fermatova věta nám dokonce obecně říká, že $\lambda^p \equiv \lambda \pmod{p}$ pro každé $\lambda \in \mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}$), dostáváme díky 4.19

$$A^{13} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{13} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

□

5 Vektorové prostory a lineární nezávislost

5.1. Rozhodněte, zda vektor a) $(1, 1, 4)^T$ a b) $(4, 1, 1)^T$ leží v podprostoru $U = \text{LO}\{(1, 4, 3)^T, (3, 1, 1)^T\}$ vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^3 nad tělesem \mathbb{Z}_5 .

Ptáme se, zda existují hodnoty $x, y \in \mathbb{Z}_5$, které řeší vektorovou rovnici $x \cdot (1, 4, 3)^T + y \cdot (3, 1, 1)^T = \mathbf{v}$, tedy chceme zjistit, zda existuje řešení soustavy 3 rovnic o 2 neznámých (pro každou souřadnici dostáváme jednu rovnici) s maticemi, které snadno upravíme na odstupňovaný tvar.

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Vidíme, že řešení soustavy existuje a vektor $(1, 1, 4)^T$ je lineární kombinací vektorů $(1, 4, 3)^T, (3, 1, 1)^T$, proto $(1, 1, 4)^T \in U$.

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

Tentokrát soustava zjevně řešení nemá, tedy $(4, 1, 1)^T \notin U$.

□

5.2. Rozhodněte, zda je podprostorem reálného lineárního prostoru \mathbb{R}^3 množina vektorů:

$$(a) \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}, (b) \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}. (c) \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$(d) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, (e) \mathbb{Q}^3, (f) \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}, (g) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ve všech úlohách máme rozhodnout, zda daná množina je či není uzavřená násobením reálným skalárem a na sčítání. Negativní odpověď tedy ověříme tak, že najdeme dvojici vektorů z množiny, jejichž součet v množině neleží nebo vektor z množiny, jehož nějaký skalární násobek v množině neleží. Pozitivní odpověď můžeme ověřit přímočaře tak, že pro dvojici vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} množiny a skalár a ukážeme, že $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a $a\mathbf{u}$ opět

v dané množině leží. My obvykle zvolíme raději rychlejší argumentaci využívající fakt, že lineární obaly jsou podprostory, kdy ukážeme, že je daná množina lineárním obalem nějakého systému vektorů.

(a) Ano, protože $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) Ne, neboť vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ leží, zatímco vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ neleží v $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$, protože jak snadno zjistíme rovnice $\begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ nemá žádné řešení.

(c) Vidíme, že $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ ovšem kdyby rovnice $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \\ x \end{pmatrix}$ měla řešení, pak by $1^2 = x^2 = 2$, což je spor. To znamená, že množina není uzavřena na násobení a tudíž není podprostorem.

(d) Ano, neboť $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(e), (f) Ne, protože $\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ neleží v Q^3 ani $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in Q \right\}$, ačkoli $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ v obou podmnožinách leží.

(g) Ano, protože $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{LO } \emptyset$.

5.3. Rozhodněte, zda množina X generuje vektorový prostor \mathbb{Z}_5^3 nad tělesem \mathbb{Z}_5 , jestliže $X =$

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Ptáme se, zda každý vektor \mathbf{y} vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^3 lze napsat jako lineární kombinaci vektorů $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, tedy zda má řešení soustava $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y}$. Na to má ovšem matice příliš málo sloupců, tedy dané vektory celé \mathbb{Z}_5^3 negenerují.

(b) Obdobně jako v (a) řešíme otázku, zda má soustava $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ řešení pro každý vektor \mathbf{y} .

Upravíme-li matici posloupností elementárních úprav $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vidíme, že odstupňovaný tvar matice obsahuje nulový řádek, tudíž existuje vektor pravých stran \mathbf{y} , pro který soustava nebude mít řešení. Opět jsme zjistili, že dané vektory celé \mathbb{Z}_5^3 negenerují.

(c) Obdobně jako v (b) upravujeme tentokrát matici $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, která je zřejmě regu-

lární. Ke každému \mathbf{y} najdeme řešení soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y}$, což znamená, že daná posloupnost vektorů generuje celé \mathbb{Z}_5^3 . □

5.4. Rozhodněte, zda je v vektorovém prostoru \mathbb{Z}_7^4 nad tělesem \mathbb{Z}_7 vektor \mathbf{v} lineární kombinací vektorů množiny $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, jestliže $\mathbf{v} =$ (a) $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. V případě, že ano, určete koeficienty této lineární kombinace.

Řešíme úlohu, kterou můžeme pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, v jejíž sloupcích jsou právě vektory množiny

X , zapsat rovnici $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$. Řešíme tedy čtyři nehomogenní soustavy rovnic se stejnou maticí levých stran A , proto celou úlohu můžeme řešit pomocí jediné rozšířené matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 6 & 0 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Odtud vidíme, že úlohy (c) a (d) nemají řešení, tedy vektor daný vektor neleží v lineárním obalu. Pro úlohy (a) a (b) zjevně existuje právě jedno řešení soustavy, tudíž dané vektory jsou lineární kombinací, jejichž

koefficienty spočítáme z dané soustavy zpětnou substitucí: (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ □

5.5. Rozhodněte, zda je množina U podprostorem aritmetického vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^3 nad tělesem \mathbb{Z}_5 , jestliže

- (a) $U = \{(0, 0, 0)^T\}$, (b) $U = \{(0, 0, 0)^T, (1, 2, 3)^T\}$, (c) $|U| = 4$,
 (d) $U = \{(0, 0, 0)^T, (1, 2, 3)^T, (2, 4, 1)^T, (3, 1, 4)^T, (4, 3, 2)^T\}$,
 (e) $|U| = 6$, (f) $|U| = 125$, (g) $U = \emptyset$,

(a) Protože $(0, 0, 0)^T + (0, 0, 0)^T = (0, 0, 0)^T$ a $t(0, 0, 0)^T = (0, 0, 0)^T$ pro každé $t \in T$, je podle Tvzení 5.6 z přednášky množina $\{(0, 0, 0)^T\}$ podprostorem \mathbb{Z}_5^3 .

(b) Vidíme, že $(1, 2, 3)^T + (1, 2, 3)^T = 2(1, 2, 3)^T = (2, 4, 1)^T \notin U$, proto podle Tvzení 5.6 U není podprostorem.

(c) Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ nenulový vektor, potom množina $\text{LO } \mathbf{u} = \{a\mathbf{u} \mid a \in \mathbb{Z}_5\}$ obsahuje právě tolik různých vektorů, kolik prvků obsahuje těleso \mathbb{Z}_5 . Proto čtyřprvkový podprostor (který by nutně obsahoval nenulový vektor) nad tělesem \mathbb{Z}_5 nemůže existovat.

(d) Snadno pomocí Tvzení 5.14 z přednášky nahlédneme, že $U = \text{LO}\{(1, 2, 3)^T\}$, tedy se jedná o podprostor.

(e) Kdyby existoval šestiprvkový podprostor nad tělesem \mathbb{Z}_5 , pak obsahoval nějaký nenulový vektor \mathbf{u} a pak ještě jeden vektor $\mathbf{v} \in U \setminus \text{LO } \mathbf{u}$. Podle Tvzení 5.26 by množin $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ byla lineárně nezávislá, a proto by vektor $2\mathbf{u} \notin \text{LO } \mathbf{u} \cup \{\mathbf{v}\}$, což je spor s předpokladem $|U| = 6$. Tudíž žádný šestiprvkový podprostor nad tělesem \mathbb{Z}_5 neexistuje.

(f) Všimneme-li si, že 125 prvků má celý aritmetický prostor \mathbb{Z}_5^3 , vidíme, že $U = \mathbb{Z}_5^3$ je podprostorem \mathbb{Z}_5^3 .

(g) Prázdná množina sice triviálně splňuje podmínku uzavřenosti na operace, ale za podprostor ji nepovažujeme. □

5.6. Dokažte, že množina komplexních čísel \mathbb{C} tvoří s obvyklým sčítáním a násobením vektorový prostor nad tělesem reálných čísel \mathbb{R} .

Je třeba zcela přímočaře ověřit platnost axiomatiky vektorového prostoru. Přitom víme, že \mathbb{C} je se sčítáním a násobením těleso, odkud okamžitě dostáváme asociativitu a komutativitu sčítání, stejně jako existenci nulového vektoru (0) . Protože $r(c+d) = rc+rd$ pro všechna komplexní r, c, d platí tato rovnost i v případě, že zvolíme $r \in \mathbb{R}$. Stejný argument ukazuje, že pro každé $r, s \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{C}$ máme $(r+s)c = rc+sc$ a $(rs)c = r(sc)$. Konečně zřejmé $1c = c$. □

5.7. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů X ve vektorovém prostoru V lineárně závislá či nezávislá, jestliže

- (a) $X = ((1, 0, 2, 1)^T, (2, 0, 1, 1)^T, (1, 0, 1, -1)^T)$ a $V = \mathbb{Q}^4$,
 (b) $X = ((1, 1)^T, (1, 0)^T, (3, 4)^T)$ a $V = \mathbb{Z}_7^2$,
 (c) $X = ((1, 1, 2)^T, (2, 0, 1)^T, (2, 1, 1)^T)$ a $V = \mathbb{Z}_3^3$,
 (d) $X = (3 - i, 2 + 3i)$ a $V = \mathbb{C}$ nad tělesem \mathbb{R} ,
 (e) $X = (3 - i, 2 + 3i)$ a $V = \mathbb{C}$ nad tělesem \mathbb{C} ,
 (f) $X = (x^2 + x + 1, x^2 + 2x, x^2 + 2)$ a $V = \mathbb{R}[x]$ nad tělesem \mathbb{R} .

(a) Stačí zjistit, zda existuje (a v takovém případě půjde o lineárně závislé vektory) či neexistuje (což by znamenalo, že dané vektory by byly lineárně nezávislé) netriviální řešení vektorové rovnice

$$x_1 \cdot (1, 0, 2, 1)^T + x_2 \cdot (2, 0, 1, 1)^T + x_3 \cdot (1, 0, 1, -1)^T = (0, 0, 0, 0)$$

Úlohu převedeme na otázku, zda existuje jednoznačné (tedy pouze triviální) řešení homogenní soustavy rovnic s maticí A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z upravené soustavy dostáváme jednoznačné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, tedy vektory $(1, 0, 2, 1)^T$, $(2, 0, 1, 1)^T$, $(1, 0, 1, -1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

(b) Tentokrát nemusíme nic počítat, protože matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, do níž sepíšeme vektory určuje homogenní soustavu s alespoň jedním volným sloupcem. Proto existuje netriviální řešení homogenní soustavy s takovou maticí a posloupnost vektorů je lineárně závislá.

(c) Podobně jako v (a) se ptáme, zda existuje netriviální řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Protože $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vidíme, že existuje netriviální řešení homogenní soustavy s touto maticí, a proto je posloupnost vektorů lineárně závislá.

(d) Dokazujeme podle definice a předpokládáme, že $0 = a(3 - i) + b(2 + 3i) = (3a + 2b) + (-a + 3b)i$. Potom z reálné i imaginární části dostáváme jednu lineární rovnici nad \mathbb{R} :

$3a + 2b = 0$
 $-a + 3b = 0$ a řešíme homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, která je zjevně regulární, proto má pouze triviální řešení. Tím jsme ovšem dokázali, že je dvojice $3 - i$, $2 + 3i$ nad \mathbb{R} lineárně nezávislá, tedy jde o bázi \mathbb{C} nad \mathbb{R} .

(e) Uvažujeme posloupnost $3 - i$, $2 + 3i$ jako vektory nad \mathbb{C} , pak vidíme, že

$$2 + 3i = \frac{2 + 3i}{3 - i} \cdot (3 - i) = \left(\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i\right) \cdot (3 - i),$$

což znamená, že je posloupnost X lineárně závislá.

(f) Podobně jako v (d) uvažujme reálnou lineární kombinaci položenou rovnu nulovému polynomu:

$$0 = (x^2 + x + 1)a + (x^2 + 2x)b + (x^2 + 2)c = x^2(a + b + c) + x(a + 2b) + (a + 2c) = 0.$$

Protože polynom je nulový, jsou-li jeho koeficienty nulové, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ a + 2b &= 0 \\ a + 2c &= 0 \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že matice této homogenní soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ je singulární, tedy existuje její netriviální řešení a posloupnost X je proto lineárně závislá. \square

5.8. Najděte nějakou bázi podprostoru U aritmetického vektorového prostoru T^4 nad tělesem T , jestliže

- (a) $U = \{(0, 0, 0, 0)^T\}$ pro libovolné těleso T ,
- (b) $U = T^4$ pro libovolné těleso T ,
- (c) $U = \text{LO}\{(1, 0, 2, 1)^T, (2, 0, 1, 1)^T, (1, 0, 1, -1)^T\}$ pro $T = \mathbb{Q}$,
- (d) $U = \text{LO}\{(2, 1, 1, 1)^T, (4, 2, 1, 3)^T, (3, 4, 3, 0)^T, (1, 3, 4, 2)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_5$,
- (e) $U = \text{LO}\{(2, 0, 3, 4)^T, (3, 3, 1, 2)^T, (3, 1, 1, 2)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_5$,
- (f) $U = \text{LO}\{(1, 1, 3, 6)^T, (5, 5, 1, 0)^T, (3, 3, 2, 6)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_7$.

(a) Protože podprostor $\{(0, 0, 0, 0)^T\}$ generuje prázdna posloupnost, je právě prázdna posloupnost \emptyset báze U .

(b) Snadno nahlédneme, že bázi celého aritmetického vektorového prostoru T^4 tvoří například kanonická báze, tedy posloupnost sloupcových vektorů obsažených ve sloupcích jednotkové matice.

(c) Protože množina $X = \{(1, 0, 2, 1)^T, (2, 0, 1, 1)^T, (1, 0, 1, -1)^T\}$ podle definice generuje U a v předchozím příkladu jsme dokázali, že jde o lineárně nezávislou množinu aritmetických vektorů, tvoří množina X bázi U .

(d) Seřadíme si vektory generující podprostor U do řádků matice, již upravíme na odstupňovanou, a využijeme tvrzení z přednášky, která nám říká, že nenulové řádky matice tvoří lineárně nezávislou generující množinu vektorů:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že posloupnost $((1, 3, 4, 2)^T, (0, 0, 3, 2)^T)$ je báze podprostoru U . Závěrem poznamenejme, že $U = \text{Im}A$.

(e) Stejně jako v (d) si podprostor U vyjádříme jako řádkový vektorový prostor jisté matice B , kterou upravíme na odstupňovaný tvar:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tedy například posloupnost $((2, 0, 3, 4)^T, (0, 3, 4, 1)^T, (0, 0, 1, 4)^T)$ tvoří bázi podprostoru $U = \text{Im}B$.

(f) Opět upravujeme matici do jejíž řádku jsme sepsali generující vektory podprostoru U :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že bázi U tvoří například posloupnost $((1, 1, 3, 6)^T, (0, 0, 0, 5)^T)$. □

5.9. Spočítejte dimenzi podprostorů z předchozí úlohy.

Podle definice stačí spočítat počty vektorů báze, kterou jsme našli v předchozím příkladu:

- (a) $\dim \mathbf{U} = 0$,
- (b) $\dim \mathbf{U} = 4$,
- (c) $\dim \mathbf{U} = 3$,
- (d) $\dim \mathbf{U} = 2$,
- (e) $\dim \mathbf{U} = 3$,
- (f) $\dim \mathbf{U} = 2$.

□

5.10. Najděte nějakou bázi podprostorů vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem \mathbb{R} :

- (a) $U_1 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 3\}$,
- (b) $U_2 = \text{LO} \{x^2 + x + 1, x^2 + 2x, x^2 + 2\}$,
- (c) $U_3 = \text{LO}\{x + 1, x - 2, x^2 - x + 3, x^2 + 1\}$.

(a) Snadno nahlédneme, že podprostor všech polynomů stupně nejvýše tři generuje množina $B = \{1, x, x^2, x^3\}$. Navíc podmínka $\sum_{i=0}^3 a_i x^i = 0$ říká, že polynom $\sum_{i=0}^3 a_i x^i$ má všechny koeficienty nulové, tedy $a_0 = \dots = a_3 = 0$, tedy množina B je lineárně nezávislá, a tudíž báze U_1 .

(b) Připomeňme, že na minulém cvičení jsme spočítali, že je množina $\{x^2 + x + 1, x^2 + 2x, x^2 + 2\}$ lineárně závislá, protože pro lineární kombinaci položenou rovnu nulovému polynomu:

$$0 = (x^2 + x + 1)a + (x^2 + 2x)b + (x^2 + 2)c = x^2(a + b + c) + x(a + 2b) + (a + 2c) = 0.$$

dostáváme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a neznámými a, b, c . Konkrétně

$$x^2 + 2 = 2 \cdot (x^2 + x + 1) - (x^2 + 2x).$$

To znamená, že $\text{LO}\{x^2 + x + 1, x^2 + 2x, x^2 + 2\} = \text{LO}\{x^2 + x + 1, x^2 + 2x\}$. Nyní už snadno stejnou úvahou zjistíme, že je množina $\{x^2 + x + 1, x^2 + 2x\}$ lineárně nezávislá, tedy se jedná o bázi daného podprostoru U_2 .

(c) Všimněme si, že podprostor U_3 je částí podprostoru U_1 , a proto můžeme každý polynom jednoznačně napsat jako lineární kombinaci polynomů $B = (1, x, x^2, x^3)$. Pro každý z polynomů $\sum_{i=0}^3 a_i x^i$ si zapišme do řádku matice aritmetický vektor $(a_0, \dots, a_n)^T$ (takovému vektoru budeme brzy říkat vektor souřadnic vzhledem k bázi B) a hledíme bázi řádkového vektorového prostoru této matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že každý z původních polynomů dostaneme lineární kombinací polynomů $\{1, x, x^2\}$ a že lineární obaly $\text{LO}\{x + 1, x - 2, x^2 - x + 3, x^2 + 1\} = \text{LO}\{1, x, x^2\}$, tedy množina $\{1, x, x^2\}$ báze U_3 . \square

5.11. Najděte nějakou bázi a určete dimenzi \mathbb{C} jako vektorového prostoru nad tělesem \mathbb{R} .

Protože $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, okamžitě vidíme, že posloupnost $1, i$ generuje \mathbb{C} nad \mathbb{R} . Předpokládáme-li, že $a \cdot 1 + b \cdot i = 0$ pro nějaká reálná $a, b \in \mathbb{R}$, pak nutně $a = b = 0$, čímž jsme ověřili, že $1, i$ je báze \mathbb{C} nad \mathbb{R} , tedy $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. \square

5.12. Rozhodněte, zda dvojice komplexních čísel $3 - i, 2 + 3i$ tvoří bázi vektorového prostoru \mathbb{C} nad tělesem \mathbb{R} .

Díky tomu, že jsme v předchozím příkladu spočítali, že $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, stačí zjistit, zda je dvojice $3 - i, 2 + 3i$ lineárně nezávislá nebo generující, zbývající vlastnost je totiž podle důsledkem každé z nich. Ukážeme například, že jde o lineárně nezávislou množinu. Jestliže $0 = a(3 - i) + b(2 + 3i) = (3a + 2b) + (-a + 3b)i$, tedy z reálné i imaginární části dostáváme jednu rovnici:

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= 0 \\ -a + 3b &= 0 \end{aligned}$$
 a řešíme homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, která má zjevně hodnotu 2, tedy pouze triviální řešení.

Tím jsme dokázali, že je dvojice $3 - i, 2 + 3i$ lineárně nezávislá, tedy jde o bázi \mathbb{C} nad \mathbb{R} . \square

5.13. Vyberte z posloupností $X = ((2, 1, 1, 1)^T, (4, 2, 1, 3)^T, (3, 4, 3, 0)^T, (1, 3, 4, 2)^T)$, resp. $Y = ((2, 0, 3, 4)^T, (1, 3, 1, 2)^T, (1, 0, 1, 2)^T)$ báze podprostorů $\mathbf{U} = \text{LO } X$, resp. $\mathbf{V} = \text{LO } Y$ aritmetického vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^4 .

Nejprve si všimněme, že už jsme v Příkladu 5.8(d),(e) báze U i V hledali. Nešlo ovšem o báze vybrané. Využijme tedy spočítaných dimenzí a hledáme dvouprvkovou lineárně nezávislou množinu v \mathbf{U} , tedy dvojici vektorů, které nejsou svými násobky, což zřejmě splňuje například dvojice vektorů $(2, 1, 1, 1)^T, (3, 4, 3, 0)^T$ nebo $(3, 4, 3, 0)^T, (1, 3, 4, 2)^T$ a tříprvkovou generující množinu \mathbf{U} , již je zřejmě celé Y . \square

5.14. Vyberte z posloupnosti

$$X = ((2, 4, 0, 1, 4)^T, (4, 3, 0, 2, 3)^T, (1, 2, 3, 4, 0)^T, (3, 1, 1, 1, 2)^T, (4, 3, 4, 0, 2)^T)$$

bázi podprostoru $U = \text{LO } X$ vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^5 nad tělesem \mathbb{Z}_5 .

Potřebujeme si uvědomit, které vektory z daného seznamu jsou lineární kombinací předchozích. Seřadíme si tedy vektory do posloupnosti a budeme zjišťovat, které vektory jsou lineární kombinací předchozích členů

posloupnosti. Nejprve si tedy seřadíme vektory do řádků matice, čímž máme dānu posloupnost vektorů, a tu budeme upravovat Gaussovou eliminací dokud nezískáme odstupňovanou matici. Jedná se tedy o posloupnost elementárních úprav, kdy k níže položeným řádkům přičítáme výše položené řádky, případně nelze-li nějakým řádkem upravit níže položené řádky, pak takový vektor) vyměníme z níže položeným vektorem přehazujeme násob tvar. Přitom si řádky původní matice označíme římskými číslicemi a budeme zaznamenávat všechna přehazování řádků a stačí zjistit, kterým řádkům původní matice odpovídají nenulové řádky Gaussovy matice.

Poznamenejme, že je podstatné, abychom neměnili pořadí těch vektorů, pomocí nichž jsme upravovali všechny následující, tj. těch řádků matice, které už jsme použili k eliminaci následujících. Takový řádek už totiž odpovídá vektoru, který je lineárně nezávislý na předchozích a jeho případná záměna za některý z následujících vektorů pro něj samozřejmě podmínku lineární nezávislosti na předchozích řádcích nemusí zachovat. V daném případě nejprve přičteme vhodné násobky prvního řádku k ostatním a poté přehodíme druhý a třetí řádek, jímž stejným způsobem vynulujeme pátý a šestý řádek:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & i \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 3 & ii \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & iii \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & iv \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 2 & v \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ii \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & iii \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & iv \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & v \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & i \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & iii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & iv \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{array} \right).$$

Ukázalo se, že řádek ii je násobkem řádku i a řádky iv a v jsou lineární kombinací řádků i a iii. Naopak řádek iii není lineární kombinací řádku i. Hledanou bázi tvoří například první a třetí vektor posloupnosti

$$X, \text{ tedy posloupnost } \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

□

5.15. Doplněte lineárně nezávislou množinu $B = \{(2, 4, 0, 1, 4)^T, (1, 2, 1, 0, 3)^T\}$ na bázi aritmetického vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^5 .

Připomeňme, že se řádkový vektorový prostor matice nezmění, upravíme-li ji posloupností elementárních řádkových úprav. Seřadíme-li vektory množiny B do řádků matice, kterou upravíme na odstupňovanou matici, vidíme, že

$$\text{LO } B = \text{Im} \left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right)^T = \text{Im} \left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^T$$

Nyní snadno doplníme matici na odstupňovanou čtvercovou matici, jejíž všechny řádky jsou nenulové, například vektory standardní báze (i-tý přidáme, právě když i-tý sloupec matice není bázový) a přitom si všimneme, že:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = A.$$

Zřejmě má řádkový prostor matice A dimenzi 5, proto je roven \mathbb{Z}_5^5 . Tedy množina $\{(0, 1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 0, 1)^T\}$ doplňuje množinu B na bázi \mathbb{Z}_5^5 . □

5.16. Ověřte, že $B = ((1, 4, 3)^T, (3, 1, 1)^T)$ je báze podprostoru $U = \text{LO}\{(1, 4, 3)^T, (3, 1, 1)^T\}$ vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^3 nad tělesem \mathbb{Z}_5 a najděte souřadnice vektoru $(1, 1, 4)^T$ vzhledem k bázi B .

Okamžitě z definice vidíme, že posloupnost B je lineárně nezávislá, tedy jde o bázi U . Nyní hledáme hodnoty $x, y \in \mathbb{Z}_5$, které řeší vektorovou rovnici $x \cdot (1, 4, 3)^T + y \cdot (3, 1, 1)^T = (1, 1, 4)^T$, kterou jsme řešili už v minulé úloze. Zbývá tedy zpětnou substitucí dopočítat (jednoznačné) řešení:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Spočítali jsme, že souřadnice $(1, 1, 4)^T$ vzhledem k bázi B jsou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. □

5.17. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ báze vektorového prostoru Q^3 nad tělesem Q .

Podle pozorování 5.61 z přednášky stačí ověřit, zda je posloupnost lineárně nezávislá či zda generuje celý prostor Q^3 a to nastává právě tehdy, když je matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ regulární. Budeme tedy matici A upravovat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že M je bází Q^3 . □

5.18. Najděte souřadnice vektoru \mathbf{v} vzhledem k bázi M z předchozího příkladu, jestliže

$$(a) \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (b) \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c) \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hledáme aritmetický vektor $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, aby $\mathbf{v} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tedy budeme počítat řešení nehomogenní soustavy rovnic:

$$(a) \quad \text{Pro } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zřejmě } [\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad \text{Tentokrát je vektor } \mathbf{v} \text{ jedním z bázevých vektorů báze } M, \text{ proto bez počítání vidíme, že } [\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad \text{Nyní obvyklým způsobem spočítáme jednoznačné řešení nehomogenní soustavy s maticí } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. □

5.19. Ověřte, že je posloupnost polynomů $P = (x^2 + x - 1, x^2 + 2x + 2, 2x^2 - x + 1)$ báze podprostoru $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 2\}$ vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem \mathbb{R} a spočítejte souřadnice polynomu $4x$ vzhledem k bázi P .

Opět hledáme aritmetický vektor $[4x]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, který splňuje rovnici

$$a(x^2 + x - 1) + b(x^2 + 2x + 2) + c(2x^2 - x + 1) = 4x,$$

který vede na nehomogenní soustavu rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$, jejíž sloupce tvoří právě souřadnice polynomů vzhledem k bázi $(x^2, x, 1)$ podprostoru U . Zároveň si všimněme, že během jejího řešení zjistíme, zda jsou polynomy P lineárně nezávislé. To nastane právě tehdy, bude-li matice levých stran regulární:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 4 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že posloupnost P tvoří bázi U a že $[4x]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. □

5.20. Najděte nějakou bázi podprostoru $\mathbf{U} = \text{LO}\{(3, 1, 4, 2)^T, (2, 3, 5, 1)^T, (1, 5, 6, 1)^T\}$ aritmetického vektorového prostoru \mathbb{Z}_7^4 a doplňte ji bázi celého prostoru \mathbb{Z}_7^4 .

I tentokrát můžeme využít Důsledku 5.23 o řádkovém vektorovém prostoru matice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, pro níž platí, že $\mathbf{U} = \text{Im}M^T$. Nejprve standardní cestou upravíme matici M na matici odstupňovanou:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N.$$

Vidíme, že báze $\text{Im}M^T = \text{Im}N^T = \mathbf{U}$ je tvořena například nenulovými řádkovými vektory odstupňované matice N . Tedy $\{(3, 1, 4, 2)^T, (0, 0, 0, 1)^T\}$ je báze \mathbf{U} . Nyní už postupujeme stejně jako v předchozí úloze, doplníme nenulové řádky matice N pomocí vektorů standardní báze, abychom dostali odstupňovanou regulární matici $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tudíž posloupnost $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ doplňuje posloupnost $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ na bázi celého \mathbb{Z}_7^4 . \square

5.21. Uvažujme dvě posloupnosti vektorů $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ a $N = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ v vektorovém prostoru \mathbb{Z}_5^3 nad tělesem \mathbb{Z}_5 .

- (a) Ověřte, že je posloupnost M báze podprostoru $\text{LO } M$,
- (b) dokažte, že $N \subset \text{LO } M$,
- (c) spočítejte souřadnice vektorů posloupnosti N vzhledem k bázi M ,
- (d) ověřte, že N tvoří bázi podprostoru $\text{LO } M$.

(a) Stačí si všimnout, že jeden z vektorů není násobkem druhého.

(b) Ptáme se, zda jsou vektory z posloupnosti N lineární kombinací vektorů z posloupnosti M , to znamená, že se ptáme, zda existuje řešení soustav rovnic s maticemi $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Tuto

úlohu můžeme pomocí Frobeniovy věty přeformulovat na otázku, zda jsou hodnosti matic $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

a $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ stejné, tedy podle (a) rovná dvěma. To zjistíme ovšem standardně Gaussovou eliminací:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

protože je hodnost matice 2, platí, že $N \subset \text{LO } M$.

(c) Nyní máme najít řešení soustav s maticemi uvedenými v bodě (b). Obě přitom upravujeme stejně, proto počítáme obvyklým způsobem s využitím úprav v (b):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stejně jako v 5.18 jsme zjistili, že $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_M = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}_M = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Stejnou úvahou jako v bodu (a) nahlédneme, že je posloupnost N lineárně nezávislá, proto jde podle (c) o bázi podprostoru $\text{LO } M$. \square

5.22. Ověřte, že $(3 - 5i, 1 - 2i)$ tvoří bázi vektorového prostoru komplexních čísel \mathbb{C} nad tělesem reálných čísel \mathbb{R} .

Protože $K = (1, i)$ je zřejmě báze \mathbb{C} nad \mathbb{R} , stačí přejít k souřadnicovým vektorům $[3 - 5i]_K = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ a $[1 - 2i]_K = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ a u nich obvyklým způsobem nahlédnout, že jde o bázi aritmetického vektorového prostoru \mathbb{R}^2 , tj. všimnout si, že je matice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ regulární. \square

5.23. Najděte matice přechodu:

- (a) $[\text{Id}]_{K_2}^B$ a $[\text{Id}]_B^{K_2}$, kde $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ a K_2 je kanonická báze v vektorovém prostoru \mathbb{R}^2 nad tělesem \mathbb{R}
- (b) $[\text{Id}]_M^N$ a $[\text{Id}]_N^M$, kde N a M jsou báze z úlohy 5.21,
- (c) $[\text{Id}]_N^M$, kde $N = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ k bázi $M = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze \mathbb{Z}_3^2 nad tělesem \mathbb{Z}_3 .
- (d) $[\text{Id}]_K^L$ a $[\text{Id}]_L^K$, kde $K = (1, i)$ a $L = (3 - 5i, 1 - 2i)$ jsou báze \mathbb{C} nad tělesem \mathbb{R} .

(a) Postupujeme-li podle definice, vidíme, že souřadnice vektorů vzhledem ke kanonické bázi jsou tytéž vektory a protože matice $[\text{Id}]_{K_2}^B$ obsahuje ve sloupcích právě souřadnice vektorů báze B vzhledem ke kanonické bázi, stačí do sloupců přepsat bázi B . Tudíž $[\text{Id}]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Provedeme-li stejnou úvahu jako na přednášce, potřebujeme najednou vyřešit dvě soustavy rovnic s maticí levých stran $[\text{Id}]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ a s vektory pravých stran z báze K_2 . Tedy postupujeme stejně jako při hledání inverzní matice.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Spočítali jsme, že $[\text{Id}]_B^{K_2} = ([\text{Id}]_{K_2}^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Protože jsme v 5.21(c) našli souřadnice vektorů báze N vzhledem k bázi M , stačí je sepsat do sloupců, abychom dostali $[\text{Id}]_M^N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Obdobnou úvahou jako v úloze (a) tentokrát ovšem v souřadnicích zjistíme a obvyklým způsobem spočítáme, že $[\text{Id}]_N^M = ([\text{Id}]_M^N)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) Postupujeme-li podle definice, potřebujeme vyřešit maticovou rovnici $[\text{Id}]_{K_2}^M \cdot \mathbf{X} = [\text{Id}]_{K_2}^N$, kde \mathbf{X} je právě hledaná matice přechodu $[\text{Id}]_N^M$. Stačí nám tedy známým způsobem spočítat

$$[\text{Id}]_N^M = ([\text{Id}]_{K_2}^M)^{-1} \cdot [\text{Id}]_{NK_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) V úloze 5.22 jsme určili souřadnice vektorů báze L vzhledem ke K , proto $[\text{Id}]_K^L = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$. Nyní zbývá podobně jako v (a) a (b) nahlédnout a dopočítat, že $[\text{Id}]_L^K = ([\text{Id}]_K^L)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ \square

5.24. Určete nad tělesy \mathbb{R} a \mathbb{Z}_5 hodnotu matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ a matice A^T a dimenze prostorů $\text{Im}A$, $\text{Im}A^T$, $\text{Ker}A$, $\text{Ker}A^T$.

Podle tvrzení z přednášky a definice platí, že $\text{rank}A = \dim \text{Im}A = \dim \text{Im}A^T$ a tvrzení o hodnotě a nulitě matice typu $n \times m$ říká, že $\dim \text{Ker}A = m - \text{rank}(A)$, $\text{Ker}A^T = n - \text{rank}(A)$. Upravujeme tedy matici

posloupností elementárních úprav nejprve nad tělesem \mathbb{R} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že nad tělesem \mathbb{R} platí, že $\text{rank}(A) = 3$, a proto

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) = \dim \text{Im} A = \dim \text{Im} A^T = 3.$$

Potom

$$\dim \text{Ker} A = 3 - \text{rank}(A) = 3 - 3 = 0, \dim \text{Ker} A^T = 3 - \text{rank}(A^T) = 3 - 3 = 0.$$

Podobně určíme hodnotu A nad tělesem \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy nad tělesem \mathbb{Z}_5 je $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) = \dim \text{Im} A = \dim \text{Im} A^T = 2$ a $\text{Ker} A = \text{Ker} A^T = 3 - \text{rank}(A) = 3 - 2 = 1$. \square

5.25. Najděte nad tělesem \mathbb{Z}_5 báze prostorů $\text{Im} A$, $\text{Im} A^T$, $\text{Ker} A$, $\text{Ker} A^T$ pro matici A z předchozí úlohy.

Z odstupňovaného tvaru matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Okamžitě vidíme, že $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ je báze $\text{Im} A^T$ a snadno spočítáme bazické řešení $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ homogenní soustavy s maticí A , tj. bázi $\text{Ker} A$. Pro nalezení báze $\text{Ker} A^T$ řádkově upravíme A^T :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zpětnou substitucí najdeme bázi $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ prostoru $\text{Ker} A^T$. Zároveň vidíme, že báze $\text{Im} A$ je například $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (nebo kterákoli jiná dvojice lineárně nezávislých vektorů tohoto prostoru). \square

5.26. Je-li podprostor $\mathbf{U} = \text{LO}\{(2, 4, 0, 1, 4)^T, (1, 2, 1, 0, 3)^T\}$ vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^5 nad tělesem \mathbb{Z}_5 , najděte bázi nějakého takového podprostoru \mathbf{V} , aby $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbb{Z}_5^5$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$.

Uvážíme, že jsme úlohu fakticky vyřešili v Příkladu 5.15 Nejprve položíme $\mathbf{V} = \text{LO}\{(0, 1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 0, 1)^T\}$ (tedy \mathbf{V} je podprostor generovaný těmi vektory, jimiž jsme $(2, 4, 0, 1, 4)^T$, $(1, 2, 1, 0, 3)^T$ doplnili na bázi). Potom zřejmě $\mathbf{U} \vee \mathbf{V} = \mathbb{Z}_5^5$. Buď dále $\mathbf{w} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$, tedy existují takové prvky $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}_5$, že

$$\mathbf{w} = x \cdot (2, 4, 0, 1, 4)^T + y \cdot (1, 2, 1, 0, 3)^T = a \cdot (0, 1, 0, 0, 0)^T + b \cdot (0, 0, 0, 1, 0)^T + c \cdot (0, 0, 0, 0, 1)^T,$$

proto

$$a \cdot (0, 1, 0, 0, 0) + b \cdot (0, 0, 0, 1, 0) + c \cdot (0, 0, 0, 0, 1) - x \cdot (2, 4, 0, 1, 4) - y \cdot (1, 2, 1, 0, 3) = \mathbf{0}.$$

Protože je všech pět vektorů lineárně nezávislých, dostáváme přímo z definice lineární nezávislosti, že $a = b = c = x = y = 0$, tedy $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Dokázali jsme, že bázi hledaného podprostoru \mathbf{V} je tedy například posloupnost vektorů $((0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1))$. \square

5.27. Rozhodněte, zda lze nad tělesem racionálních čísel převést posloupností elementárních řádkových úprav matici A na matici B , jestliže $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a (a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Protože jde o matice stejného typu, máme rozhodnout, zda řádkové vektorové prostory obou matic splývají, tedy zda $\mathfrak{S}A = \mathfrak{S}B$. Vytvoříme-li matici C jako matici obsahující postupně všechny řádky matice A i matice B , stačí nám zjistit, zda $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = \text{rank}(C)$. Okamžitě přitom vidíme, že $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 2$. Zbývá standardním způsobem určit hodnotu matice C :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $\text{rank}(C) = 3$, tedy $\mathfrak{S}A \neq \mathfrak{S}B$ a matici A nelze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici B .

(b) Postupujeme-li obdobně jako v (a), zjistíme, že $h(A) = h(B) = 2$ a

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy i $h(C) = 2$. Matici A proto lze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici B .

Všimněme si, že jsme také mohli postupovat přímo, t.j. uvědomit si, že oba řádkové vektory $(1, 0, -1)$ a $(1, 3, 5)$ matice B dostaneme jako lineární kombinaci řádkových vektorů matice A . \square

5.28. Rozhodněte, zda lze nad tělesem racionálních čísel převést posloupností elementárních řádkových úprav matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ na matici $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. \square

5.29. Najděte redukovaný odstupňovaný tvar matice $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{Z}_7 .

Nejprve obvyklým způsobem matici M upravíme na odstupňovanou matici a poté upravíme odstupňovanou matici tak, aby bazové sloupce byly právě vektory standardní báze:

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spočítali jsme, že je matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ redukovaným odstupňovaným tvarem matice M \square

5.30. Určete dimenzi průniku podprostorů \mathbf{U} a \mathbf{V} racionálního vektorového prostoru Q^3 , je-li

$$\mathbf{U} = \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathbf{V} = \text{LO} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Snadno zjistíme, že $\dim \mathbf{U} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$, $\dim \mathbf{V} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ a $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$, proto je díky Větě o dimenzi součtu a průniku podprostorů (5.98) $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 1$. \square

5.31. Jestliže $\mathbf{U} = \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ a $\mathbf{V} = \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ podprostory vektorového prostoru \mathbb{Z}_3^4 nad tělesem \mathbb{Z}_3 , spočítejte dimenze a najděte báze podprostorů \mathbf{U} , \mathbf{V} , $\mathbf{U} + \mathbf{V}$, $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

Nejprve snadno zjistíme, že posloupnost $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ je lineárně nezávislá, tudíž báze \mathbf{U} a

podobně je posloupnost $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ lineárně nezávislá, a proto báze \mathbf{V} . Protože $3 \leq \dim \mathbf{U} +$

$\mathbf{V} \leq 4$, stačí si všimnout, že vektor $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ leží v $\mathbf{U} + \mathbf{V}$. To znamená, že $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ obsahuje

čtyřprvkovou lineárně nezávislou posloupnost $B \cup (\mathbf{e}_4)$, a proto $\dim \mathbf{U} + \mathbf{V} = 4$. Nyní zbývá použít Větu 5.98, abychom zjistili, že

$$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 3 + 3 - 4 = 2.$$

Při počítání dimenzí jsme zjistili, že je B báze \mathbf{U} , dále C je báze \mathbf{V} a například kanonická báze je bázi $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbb{Z}_3^4$.

Zbývá najít bázi $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Hledáme tedy všechny vektory, které leží zároveň v \mathbf{U} i ve \mathbf{V} , což si opět vyjádříme rovnicí:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

kterou opět upravíme na

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Znovu počítáme všechna řešení homogenní soustavy s maticí:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyní obvyklým způsobem spočítáme najít bázi podprostoru $\text{Ker } D$, například bázi $(1, 2, 2, 1, 0, 0)^T$, $(0, 2, 2, 0, 1, 1)^T$. Zjistili jsme, že:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Tudíž vektory $(1, 2, 2, 1)^T$ a $(0, 1, 1, 0)^T$ leží v podprostoru $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Konečně si uvědomíme, že libovolné řešení soustavy lze napsat ve tvaru

$$a_1 \cdot (1, 2, 2, 1, 0, 0)^T + a_2 \cdot (0, 2, 2, 0, 1, 1)^T = (a_1, 2a_1 + 2a_2, 2a_1 + 2a_2, a_1, a_2, a_2)^T,$$

kde $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_3$, proto lze každý vektor z průniku vyjádřit:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (1, 1, 1, 1)^T + (2a_1 + 2a_2) \cdot (0, 2, 1, 1)^T + (2a_1 + 2a_2) \cdot (0, 0, 1, 2)^T = \\ = a_1 \cdot (1, 2, 2, 1)^T + a_2 \cdot (0, 1, 1, 0)^T. \end{aligned}$$

Tím jsme zjistili, že každý vektor z podprostoru $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ lze napsat ve tvaru $a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tedy

posloupnost $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ podprostor $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ generuje. Zjevně se jedná o posloupnost lineárně nezávislou,

tedy jde o bázi průniku. Není přitom těžké si uvědomit, že výsledné vektory budou jistě lineárně nezávislé, jestliže jsme hledali jejich souřadnice vzhledem k bázím prostorů \mathbf{U} a \mathbf{V} .

Závěrem si ještě všimněme, že jsme soustavu nemuseli dopočítávat, neboť nám stačilo najít souřadnice báze řešení odpovídající proměnným y_i (tj. poslední 3 souřadnice) nebo x_i (tj. první 3 souřadnice). \square

5.32. Najděte nenulový reálný polynom stupně (nejvýše) 2, jehož kořenem je komplexní číslo $3 - i$.

Stačí když uvážíme, že jsou vektory $(3 - i)^0 = 1$, $(3 - i)^1 = 3 - i$ a $(3 - i)^2 = 8 - 6i$ nad tělesem \mathbf{R} nutně lineárně závislé, tedy existuje trojice $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, pro níž $a_0 + a_1(3 - i) + a_2(8 - 6i) = 0$. Obdobnou úvahou jako v předchozím příkladu zjistíme, že potřebujeme vyřešit homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. Snadno zjistíme, že řešením je například trojice $(a_0, a_1, a_2) = (10, -6, 1)$, proto je komplexní číslo $3 - i$ kořenem polynomu $x^2 - 6x + 10$. \square

5.33. Najděte všechny reálné polynom stupně nejvýše 2, jejichž kořenem je komplexní číslo $3 - i$.

V předchozí úloze jsme si uvědomili, že každý takový polynom odpovídá řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí typu (2,3) hodnosti 2. Protože je množina všech řešení podprostor dimenze 1, jsou hledané reálné polynomy tvaru $rx^2 - 6rx + 10r$ pro libovolné reálné $r \in \mathbf{R}$. \square

5.34. Dokažte, že je množina $Q[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in Q\}$ podprostor racionálního vektorového prostoru \mathbf{R} a navíc, že $\alpha \cdot \beta \in Q[\sqrt[3]{2}]$ pro každé $\alpha, \beta \in Q[\sqrt[3]{2}]$.

Stačí pro libovolné $d, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_3 \in Q$ nahlédnout, že

$$(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) + (a_2 + b_2\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt[3]{2} + (c_1 + c_2)\sqrt[3]{4} \in Q[\sqrt[3]{2}]$$

a dále, že

$$d(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) = da_1 + db_1\sqrt[3]{2} + dc_1\sqrt[3]{4} \in Q[\sqrt[3]{2}]$$

a konečně, že $(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4}) =$

$$= (a_1a_2 + 2b_1c_2 + 2c_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + 2c_1c_2)\sqrt[3]{2} + (a_1c_2 + c_1a_2 + b_1b_2)\sqrt[3]{4} \in Q[\sqrt[3]{2}].$$

\square

5.35. Najděte nenulový racionální polynom stupně (nejvýše) 3, jehož kořenem je reálné číslo $1 - \sqrt[3]{2}$.

Uvažujeme stejně jako v úloze 5.32. Opět si všimněme, že $\dim_Q(Q[\sqrt[3]{2}]) \leq 3$, proto jsou vektory $(1 - \sqrt[3]{2})^0 = 1$, $(1 - \sqrt[3]{2})^1 = 1 - \sqrt[3]{2}$, $(1 - \sqrt[3]{2})^2 = 1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ a $(1 - \sqrt[3]{2})^3 = -1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$ nad tělesem Q lineárně závislé. Najdeme tedy opět netriviální řešení vektorové rovnice

$$a_0 + a_1(1 - \sqrt[3]{2}) + a_2(1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + a_3(-1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}) = 0,$$

která vede na homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že řešením je čtveřice $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 3, -3, 1)$, tudíž je číslo $1 - \sqrt[3]{2}$ kořenem polynomu $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. \square

6 Lineární zobrazení

6.1. Necht' $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ je zobrazení dané předpisem $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}$. Rozhodněte, zda jde o lineární zobrazení.

Na přednášce jsme si uvědomili, že díky Tvrzením 4.18 a 4.20 zobrazení dané násobením sloupcového vektoru (tedy matice typu $(n, 1)$) maticí splňuje axiomy lineárního zobrazení, tedy

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} \quad \text{a} \quad A(r \cdot \mathbf{u}) = r \cdot A(\mathbf{u})$$

pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$ a $r \in \mathbb{Z}_5$. □

Označujme K_n kanonickou bázi libovolného aritmetického vektorového prostoru T^n nad tělesem T a její i -tý vektor \mathbf{e}_i .

6.2. Najděte matici lineárního zobrazení f z předchozí úlohy vzhledem

(a) ke kanonickým bázím K_3 a K_2 ,

(b) k bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a K_2 ,

(c) k bázi B a $C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$,

(a) Podle definice nejprve potřebujeme zjistit souřadnice vektorů $f(\mathbf{e}_i)$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru \mathbb{Z}_5^2 :

$$[f(\mathbf{e}_1)]_{K_2} = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{K_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[f(\mathbf{e}_2)]_{K_2} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$[f(\mathbf{e}_3)]_{K_2} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá souřadnicové vektory uspořádat do sloupců matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím $[f]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A$.

(b) Opět postupujeme podle definice a dostáváme souřadnice

$$[f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)]_{K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)]_{K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$[f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)]_{K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $[f]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Tentokrát využijeme Tvrzení 6.15 můžeme vyjádřit hledanou matici $[f]_C^B$ jakou součin matic: $[f]_C^B = [\text{Id}]_C^{K_3} \cdot [f]_{K_3}^B = ([\text{Id}]_C^{K_3})^{-1} \cdot [f]_{K_3}^B$. Přímo z definice určíme matici přechodu $[\text{Id}]_C^{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Obvyklým

způsobem nyní počítáme součin $[f]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Spočítali jsme, že $[f]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

6.3. Pro lineární zobrazení f z předchozích dvou příkladů najděte bázi podprostorů $\text{Ker } f$ a $\text{Im } f$ a souřadnice báze $\text{Ker } f$ vzhledem k bázi B z předchozí úlohy.

Připomeňme, že $\text{Ker } f = \{\mathbf{v} \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{v} \mid A\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. Tedy $\text{Ker } f$ je právě množina všech řešení homogenní soustavy s maticí A , tj. $\text{Ker } f = \text{Ker } A$. Snadno spočítáme, že $\text{Ker } f = \text{LO}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, tudíž $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ je báze $\text{Ker } f$.

Vezmeme-li libovolnou generující množinu G vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^3 (například kanonickou bázi), potom $f(G)$ tvoří generující množinu podprostoru $\text{Im } f = f(\mathbb{Z}_5^3)$. Vidíme, že $f((1, 0, 0)^T) = (4, 1)^T$, $f((0, 1, 0)^T) = (1, 2)^T$ a $f((0, 0, 1)^T) = (2, 3)^T$, tj. obrazy vektorů kanonické báze tvoří právě sloupce matice A . To znamená, že $\text{Im } f = \text{Im } A = \text{LO}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{Z}_5^2$. Dimenze $\text{Im } f$ je jak víme také podle Věty o dimenzi jádra a obrazu 5.94 rovna $3 - \dim \text{Ker } A = 2$ a báze $\text{Im } f$ je tudíž libovolná báze \mathbb{Z}_5^2 , například kanonická báze.

Pro nalezení souřadnic báze $\text{Ker } f$ vzhledem k B můžeme buď obvyklým způsobem spočítat souřadnice nalezeného vektoru $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, což znamená vyřešit nehomogenní soustavu rovnic, nebo můžeme využít Tvrzení

6.25, podle nějž stačí najít bázi homogenní soustavy rovnic s již nalezenou maticí $[f]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. To je zjevně velmi snadné a vidíme, že souřadnicovým vektorem báze $\text{Ker } f$ vzhledem k B je například vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

6.4. Necht' $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ je zobrazení určené předpisem

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení.

Snadno zjistíme, že lze předpis definující zobrazení g vyjádřit jako součin matice a aritmetického vektoru: $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Proto jde o lineární zobrazení. □

6.5. Najděte matici vzhledem ke kanonickým bázím lineárního zobrazení g z předchozího příkladu.

Postupujeme stejně jako v Příkladu 6.2. Stačí tedy dosadit vektory kanonické báze do g a seřadíme je do sloupců matice $[g]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. □

6.6. Mějme $A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ bázi prostoru \mathbb{Z}_7^2 a $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ bázi prostoru \mathbb{Z}_7^3 . Najděte matici lineárního zobrazení $h : \mathbb{Z}_7^2 \rightarrow \mathbb{Z}_7^3$ vzhledem k bázím A a B , známe-li matici h vzhledem ke kanonickým bázím $[h]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Dvojí aplikací tvrzení z přednášky můžeme vyjádřit hledanou matici $[h]_B^A$ jakou součin matic:

$$[h]_B^A = [\text{Id}]_B^{K_3} \cdot [h]_{K_3}^{K_2} = [\text{Id}]_B^{K_3} \cdot [h]_{K_3}^{K_2} \cdot [\text{Id}]_{K_2}^A = ([\text{Id}]_{K_3}^B)^{-1} \cdot [h]_{K_3}^{K_2} \cdot [\text{Id}]_{K_2}^A.$$

Snadno určíme přímo podle definice matice přechodu od kanonické báze k bázi A resp. B , tj. do sloupečků sepíšeme bázi A resp. B :

$$[\text{Id}]_{K_2}^A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\text{Id}]_{K_3}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dokončení úlohy je už jen rutinním počítáním s maticemi:

$$[h]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nyní součin matic dopočítáme standardním postupem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & | & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & | & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & | & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & | & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & | & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & | & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $[h]_B^A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. □

6.7. Buď $A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ báze prostoru \mathbb{Z}_3^3 a $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ báze prostoru \mathbb{Z}_3^2 . Najděte matici lineárního zobrazení $\psi : \mathbb{Z}_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2$ vzhledem ke kanonickým bázím, má-li vzhledem k bázím A a B matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Postupujeme stejně jako v předchozí úloze s využitím tvrzení o matici složeného lineárního zobrazení:

$$[\psi]_{K_2}^{K_3} = [\text{Id}]_{K_2}^B \cdot [\psi]_B^A \cdot [\text{Id}]_A^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

a některým ze známých způsobů dopočítáme $[\psi]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

6.8. Uvažujme první derivaci $()'$ na vektorovém prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]_4 = \{\sum_{i=0}^3 a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ stupně menší než 4 a označme $K = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ bázi $\mathbb{R}[x]_4$. Z matematické analýzy víme, že je $()'$ lineární zobrazení.

- Najděte matici $[(\cdot)']_K^K$,
- určete jádro $\text{Ker}(\cdot)'$ a $\text{Im}(\cdot)'$,
- je-li nějaká B báze $\mathbb{R}[x]_4$, najděte nejmenší n pro které $[(\cdot)']_B^B)^n = \mathbf{0}$.

(a) Stačí derivovat jednotlivé polynomy báze K a určit souřadnice derivací vzhledem k této bázi:

$$[(x^0)']_K = [0]_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [(x^1)']_K = [x^0]_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [(x^2)']_K = [2x^1]_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [(x^3)']_K = [3x^2]_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy $[(\cdot)']_K^K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Odpověď dostaneme buď elementární úvahou na půdě matematické analýzy, která říká, že nulovou derivaci mají právě konstantní funkce, tedy $\text{Ker}(\cdot)' = \text{LO}x^0$, a obrazem polynomů stupně menší než 4 jsou právě polynomy stupně menší než 3, tedy $\text{Im}(\cdot)' = \text{LO}x^0, x^1, x^2$, nebo též výsledek můžeme vyčíst v souřadnicích vzhledem ke K z matice $[(\cdot)']_K^K$ pomocí Tvrzení 6.25.

(c) Uvědomíme-li si, že složením n derivací dostaneme derivaci n -tého stupně, tj. $((\cdot)')^n = (\cdot)^{(n)}$ a připomeneme-li si, že $(\mathbb{R}[x]_4)^{(n)} = \mathbf{0}$, právě když $n \geq 4$, pak stačí jen opakovaně využít Tvrzení 6.15, abychom zjistili, že

$$[(\cdot)']_B^B)^n = (((\cdot)')^n)_B^B = [(\cdot)^{(n)}]_B^B = \mathbf{0} \Leftrightarrow n \geq 4.$$

To ovšem znamená, že nejmenší n pro které $[(\cdot)']_B^B)^n = \mathbf{0}$ je $n = 4$. □

6.9. Najděte matici lineárního zobrazení φ vektorového prostoru \mathbb{R}^2 vzhledem ke kanonickým bázím, víte-li, že $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Protože $B = ((1, 2)^T, (2, 1)^T)$ tvoří bázi \mathbb{R}^2 , zaručuje nám Tvzení 7.4, že daná podmínka určuje lineární zobrazení f jednoznačně, a bezprostředně z definice dostaneme matici $[\varphi]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dále postupujeme obvyklým způsobem:

$$\begin{aligned} [\varphi]_{K_2}^{K_2} &= [\varphi]_{K_2}^B \cdot [\text{Id}]_B^{K_2} = [\varphi]_{BK_2} \cdot ([\text{Id}]_{K_2}^B)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

6.10. Je-li $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ matice lineárního zobrazení $f: \mathbb{Z}_7^4 \rightarrow \mathbb{Z}_7^3$ vzhledem k bázím $M = ((1, 1, 0, 0)^T, (0, 1, 1, 0)^T, (0, 0, 1, 1)^T, (1, 0, 0, 0)^T)$ prostoru \mathbb{Z}_7^4 a $N = ((3, 1, 4)^T, (3, 3, 0)^T, (2, 1, 6)^T)$ prostoru \mathbb{Z}_7^3 . Určete dimenze jádra $\text{Ker } f$ a obrazu $\text{Im } f$.

Nejprve standardní cestou určíme hodnotu matice $[f]_N^M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ a zjistíme, že $h([f]_{MN}) = 2$.

Nyní využijeme Tvzení 5.94, které říká, že $\dim(\text{Im } f) = h([f]_{MN}) = 2$ a že $\dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) = \dim(\mathbb{Z}_7^4) = 4$. Proto $\dim(\text{Ker } f) = 4 - \dim(\text{Im } f) = 2$. □

7 Permutace a determinanty

7.1. Zapište v cyklickém zápisu a redukovaném cyklického zápisu permutace $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$. Kolika různými způsoby lze v redukovaném a nerdukovaném tvaru permutaci p a q zapsat?

Postupně vyčerpáme všechny prvky z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, abychom zapsali cykly permutací $p = (13)(246)(5)$ a $q = (1)(2365)(4)$. V redukovaném cyklickém zápisu vynecháme všechny jednocykly, tedy pevné body daného zobrazení, a proto $p = (13)(246)$ a $q = (2365)$.

Zápis každého cyklu konkrétní permutace je určen svou první hodnotou, tedy n -cyklus lze zapsat n způsoby. Protože můžeme cykly v cyklickém zápisu ještě vzájemně libovolně permutovat, vidíme, že permutaci p lze v redukovaném cyklickém zápisu zapsat právě $2 \cdot 3 \cdot 2! = 12$ způsoby a v nerdukovaném cyklickém zápisu ji lze zapsat právě $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3! = 36$ způsoby. Stejnou úvahou dostaneme, že permutaci q můžeme v redukovaném cyklickém zápisu zapsat právě 4 způsoby a v nerdukovaném cyklickém zápisu právě $4 \cdot 3! = 24$ způsoby. □

7.2. Mějme permutace $p = (1298)(36)(574)$ a $q = (34875)$ z množiny S_9 v redukovaném cyklickém zápisu. Určete jejich maticový zápis.

Z cyklického zápisu permutace p vidíme, že $p(1) = 2$, $p(2) = 9$, $p(9) = 8$, $p(8) = 1$, $p(3) = 6$, $p(6) = 3$, $p(5) = 7$, $p(7) = 4$ a $p(4) = 5$. Nyní snadno tyto údaje zaznamenáme do matice

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 5 & 7 & 3 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Snadno rozšíříme redukovaný cyklický zápis permutace q na nerdukovaný zápis $q = (34875)(1)(2)(6)(9)$ a obdobným způsobem jako u permutace p najdeme matici

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 & 6 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

□

7.3. Necht $p = (135)(4798)(26)$ a $q = (18)(247693)$ jsou dvě permutace z S_9 . Spočítejte permutace $p \circ q$, $q \circ p$, p^{-1} a q^{-1} .

Nejprve přímo použitím definice snadno zjistíme hodnoty (skládáme zprava doleva):

$$p \circ q = (1495)(27)(368), \quad q \circ p = (129)(3587)(46).$$

Dále snadno nahlédneme, že inverzní permutací je právě „zrcadlový obraz“ permutace, tedy

$$p^{-1} = (62)(8974)(531), \quad q^{-1} = (18)(239674).$$

□

7.4. Určete znaménka permutací p a q z předchozí úlohy.

Stačí, abychom spočítali počet cyklů sudé délky v cyklickém zápisu každé z permutací, je-li jich sudý počet, je znaménko 1, v opačném případě je znaménko -1 . V obou případech vidíme, že $p = (135)(4798)(26)$ i $q = (18)(247693)(5)$ obsahují 2 cykly sudé délky, proto $\text{sgn } p = \text{sgn } q = 1$. □

7.5. Určete znaménka permutací $p = (17)(36)(2458)$, p^{-1} , $q = (245)(3687)$, $r = (13)(2675)$, $p \circ q \circ r$, $q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q \in S_8$.

Nejprve opět spočítáme cykly sudé délky, abychom zjistili, že

$$\text{sgn } p = \text{sgn } ((17)(36)(2458)) = (-1)^{8-3} = -1,$$

$$\text{sgn } q = \text{sgn } ((1)(245)(3687)) = (-1)^{8-3} = -1,$$

$$\text{sgn } r = \text{sgn } ((13)(2675)(4)(8)) = (-1)^{8-4} = 1.$$

V předchozí úloze jsme si mohli všimnout, že inverzní permutace má stejně cyklů jako permutace původní, proto $\text{sgn } p^{-1} = \text{sgn } p = -1$. Konečně tvrzení z přednášky nám říká, že znaménko složení permutací se rovná součinu znamének, proto

$$\text{sgn } (p \circ q \circ r) = \text{sgn } p \cdot \text{sgn } q \cdot \text{sgn } r = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1$$

Spojením posledních dvou pozorování dostáváme:

$$\text{sgn } (q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q) = \text{sgn } q \cdot \text{sgn } r \cdot \text{sgn } p \cdot \text{sgn } q = \text{sgn } r \cdot \text{sgn } p = -1.$$

□

7.6. Napište permutace $p = (13475)$ a $q = (19)(267)(3548)$ z S_9 jako součin transpozic.

Připomeňme, že transpozice je permutace, která vyměňuje právě dva prvky, tj. můžeme ji v redukovaném cyklickém zápisu zapsat ve tvaru (ab) . Snadno spočítáme, že

$$(13475) = (15) \circ (17) \circ (14) \circ (13) = (13) \circ (34) \circ (47) \circ (75).$$

Přímo z definice cyklického zápisu vidíme, že $(19)(267)(3548) = (19) \circ (267) \circ (3548)$, tedy nejprve úlohu vyřešíme pro každý z cyklů (19) , (267) a (3548) a poté nalezené transpozice složíme, tedy

$$\begin{aligned} (19)(267)(3548) &= (19) \circ (267) \circ (3548) = \\ &= (19) \circ (27) \circ (26) \circ (38) \circ (34) \circ (35) = (19) \circ (26) \circ (67) \circ (35) \circ (54) \circ (48). \end{aligned}$$

□

7.7. Spočítejte nad tělesy \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 determinant matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Postupujeme přímo podle definice. Rozmyslíme si, že $S_2 = \{\text{Id}, (12)\}$. a proto $\det(A) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$ nad tělesy \mathbb{Q} , \mathbb{R} . Obvyklá úvaha o počítání v tělesech \mathbb{Z}_p nám umožní využít výsledku spočítaného v tělese reálných (či racionálních) čísel, který nakonec stačí upravit modulo p . To znamená, že $\det(A) = (5) \bmod 5 = 0$ nad tělesem \mathbb{Z}_5 a $\det(A) = (5) \bmod 7 = 5$ nad tělesem \mathbb{Z}_7 . □

7.8. Spočítejte nad tělesy \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 determinant matice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

I tentokrát budeme fakticky postupovat podle definice. Sudým permutacím Id, (123) a (132) z S_3 odpovídají po řadě součiny $1 \cdot 0 \cdot 1$, $2 \cdot 3 \cdot 2$ a $1 \cdot 4 \cdot 3$ (vždy bereme nejprve hodnotu z prvního řádku, poté z druhého a nakonec z třetího) a lichým permutacím (12), (13) a (23) odpovídají součiny $2 \cdot 4 \cdot 1$, $1 \cdot 0 \cdot 2$ a $1 \cdot 3 \cdot 3$, proto

$$\det(B) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - (2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 3).$$

Tedy $\det(B) = 7$ nad tělesy \mathbb{Q} , \mathbb{R} a $\det(B) = 2$ nad tělesem \mathbb{Z}_5 a $\det(B) = 0$ nad tělesem \mathbb{Z}_7 . □

7.9. Rozhodněte, zda je nad tělesy \mathbb{Q} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 regulární matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A \cdot B \text{ a } A^{555}.$$

Díky tvrzení z přednášky stačí zjistit, zda jsou determinanty jednotlivých matic nenulové. Spočítejme nejprve determinanty matic A a B :

$$\det A = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\right) = -5$$

nad \mathbb{Q} , $\det A = 0$ nad \mathbb{Z}_5 a $\det A = 2$ nad \mathbb{Z}_7 , což znamená, že je A regulární nad \mathbb{Q} a \mathbb{Z}_7 a A je singulární nad \mathbb{Z}_5 . Podobně

$$\det B = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = 6$$

nad \mathbb{Q} , $\det B = 1$ nad \mathbb{Z}_5 a $\det B = 6$ nad \mathbb{Z}_7 , tedy B je regulární nad všemi tělesy \mathbb{Q} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 . Použijeme-li Větu 7.26, která říká, že $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, pak vidíme, že $\det(A \cdot B) \neq 0$ právě když $\det A \neq 0$ a $\det B \neq 0$. Tudíž matice $A \cdot B$ je regulární nad \mathbb{Q} a \mathbb{Z}_7 a není regulární nad \mathbb{Z}_5 . Konečně indukčním rozšířením věty z přednášky dostaneme, že $\det(A^{555}) = \det(A)^{555}$, a proto je matice A^{555} regulární právě nad tělesy \mathbb{Q} a \mathbb{Z}_7 . □

7.10. Určete nad tělesy \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 determinanty matic

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice $C_1 = (c_{ij})$ můžeme opět spočítat podle definice, uvědomíme-li si, že pro každou neidentickou permutaci $\sigma \in S_5$ bude existovat aspoň jedno j , pro něž $j > \sigma(j)$, a proto $c_{j\sigma(j)} = 0$ a $c_{1\sigma(1)} \cdots c_{5\sigma(5)} = 0$. Tedy determinant Gaussovy čtvercové matice C_1 je právě součin hodnot na hlavní diagonále, tj. $\det(C_1) = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 48$ nad tělesy \mathbb{Q} a \mathbb{R} , $\det(C_1) = (48) \bmod 5 = 3$ nad tělesem \mathbb{Z}_5 a $\det(C_1) = (48) \bmod 7 = 6$ nad tělesem \mathbb{Z}_7 .

Nyní si všimněme, že matici C_2 dostaneme z matice C_1 výměnou 1. a 4. řádku. Proto podle tvrzení z přednášky je $\det(C_2) = -\det(C_1)$, tudíž $\det(C_2) = -48$ nad tělesy \mathbb{Q} , \mathbb{R} , $\det(C_2) = (-48) \bmod 5 = 2$ nad tělesem \mathbb{Z}_5 a $\det(C_2) = (-48) \bmod 7 = 1$ nad tělesem \mathbb{Z}_7 . □

7.11. Spočítejte nad tělesy \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 determinant matice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Připomeňme, že tvrzení z přednášky nám říkají, jak se změní determinant matice, provedeme-li některou z řádkových úprav. V předchozí úloze jsme si navíc uvědomili, že je velmi snadné určit determinant Gaussovy matice jako součin hodnot na hlavní diagonále. Budeme-li tedy standardními prostředky pomocí elementárních úprav řádků převádět matici D na její Gaussovu matici, budeme v každém kroku znát, jak jsme původní determinant změnili. Tedy upravujeme a počítáme:

$$\begin{aligned} \det(D) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5. \end{aligned}$$

Tedy zjistili jsme, že $\det(D) = 5$ nad tělesy \mathbb{Q} , \mathbb{R} , $\det(D) = 0$ nad tělesem \mathbb{Z}_5 a $\det(D) = 5$ nad tělesem \mathbb{Z}_7 . \square

7.12. Spočítejte nad tělesy \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 determinant matice $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Tentokrát k výpočtu použijeme tvrzení z přednášky a budeme determinant rozvíjet podle 2. řádku:

$$\begin{aligned} \det(G) &= (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= -3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2) = 30. \end{aligned}$$

Tedy jako obvykle $\det(G) = 30$ nad \mathbb{Q} a \mathbb{R} , $\det(G) = 0$ nad \mathbb{Z}_5 a $\det(G) = 2$ nad \mathbb{Z}_7 . \square

Poznamenejme, že jsme determinanty ani další členy rozvoje, které přísluší nulovému prvku z řádku, podle nějž determinant rozvíjíme, vůbec nemuseli psát. Navíc si uvědomme, že tato metoda je vhodná právě v případě, kdy některý z řádků nebo sloupců, využijeme-li pozorování obsahuje „hodně“ nul.

7.13. Spočítejte determinant matice $H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ nad tělesem racionálních čísel.

V matici H sice žádný řádek ani sloupec neobsahuje větší počet nul, ovšem první a čtvrtý sloupec se liší jen na jedné pozici. Víme, že odečteme-li od jednoho z těchto sloupců druhý, nezmění se podle tvrzení z přednášky hodnota determinantu. Po této úpravě už ovšem můžeme použít metodu rozvoje podle sloupce:

$$\begin{aligned} \det(H) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \\ &= (-1) \cdot (-2) \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní odečteme od prvního řádku upravené matice trojnásobek druhého řádku. Na prvním řádku zůstanou dva nenulové prvky, podle nichž determinant rozvedeme a snadno dopočítáme:

$$\begin{aligned} \det(H) &= 2 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}\right) = \\ &= 2 \cdot (-5) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}\right) - 2 \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) = \\ &= -10 \cdot (14 - 1 + 3 + 14) - 2 \cdot (4 + 1 + 12 + 4 + 4 - 3) = -344. \end{aligned}$$

□

7.14. Rozhodněte pro která reálná a jsou reálné matice $P(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$, $Q(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(a) \cdot Q(a)$ a $P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}$ regulární.

Nejprve spočítáme determinanty $\det(P(a)) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = a - a^2$, a

$$\det(Q(a)) = \det\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2a-1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - 2a.$$

Věta 7.22 z přednášky říká, že je matice regulární, právě když je její determinant nenulový. Determinanty matic $P(a)$ a $Q(a)$ už jsme spočítali, zbývá nám s využitím Věty 7.26 spočítat $\det(P(a) \cdot Q(a)) = \det(P(a)) \cdot \det(Q(a)) = a(1-a)(1-2a)$. Vidíme, že je matice $P(a)$ regulární, právě když $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, matice $Q(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ a součin $P(a) \cdot Q(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Konečně indukční aplikací Věty 7.26 dostáváme, že

$$\det(P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}) = \det(P(a))^{257} \cdot \det(Q(a))^{374} = a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}.$$

Protože polynom $a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}$ v proměnné a nemá jiné kořeny než $0, \frac{1}{2}, 1$, vidíme, že je matice $P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}$ regulární opět právě tehdy, když $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. □

7.15. Rozhodněte pro která $x \in \mathbb{Z}_5$ je matice $\begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$ nad tělesem \mathbb{Z}_5 singulární.

Opět spočítáme determinant matice $A(x) = \begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$, nejprve přičteme třetí sloupec k druhému a pak rozvedeme podle třetího řádku:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 2x & 3x+4 & 2x+1 \\ x+4 & 3x & 3 \\ x+1 & 0 & 4x \end{pmatrix} = \\ &= (x+1) \cdot (4x^2 + x + 2) + 4x \cdot (3x^2 + 4x + 4) = x^3 + x^2 + 4x + 2. \end{aligned}$$

Stejně jako v předchozí úloze potřebujeme najít $x \in \mathbb{Z}_5$, pro něž je hodnota $\det(A(x)) = x^3 + x^2 + 4x + 2 = 0$, což snadno zjistíme dosazováním jednotlivých prvků tělesa \mathbb{Z}_5 :

$$\det(A(0)) = 2, \quad \det(A(1)) = 1^3 + 1^2 + 4 \cdot 1 + 2 = 3, \quad \det(A(2)) = 2^3 + 2^2 + 4 \cdot 2 + 2 = 2,$$

$$\det(A(3)) = 3^3 + 3^2 + 4 \cdot 3 + 2 = 0, \quad \det(A(4)) = 4^3 + 4^2 + 4 \cdot 4 + 2 = 3.$$

Zjistili jsme, že je matice $A(x)$ singulární, právě když je $x = 3$. □

7.16. Vyřešte nad reálnými čísly soustavu rovnic $A\mathbf{x}^T = (1, 0, 0)^T$ s reálným parametrem a , kde $A = \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}$.

Pro počítání použijeme Cramerovo pravidlo, tedy Věty 7.28 z přednášky. Nejdříve určíme $\det A = 2a \cdot (a+1)$. To znamená, že Cramerovo pravidlo můžeme využít pro parametr $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, -1\}$, t.j. je-li matice A regulární. Dále určíme determinanty matic A_i , které vzniknou z matice A nahrazením i -tého sloupce sloupcem pravých stran vektorem, tedy $(1, 0, 0)^T$: $\det A_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a$, $\det A_2 =$

$$\det \begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & 2a \\ a & 0 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a \text{ a } \det A_3 = \det \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2a.$$

Nyní pomocí Věty 7.28 spočítáme hodnotu i -té neznámé jako $x_i = (\det A)^{-1} \cdot \det A_i$. Tedy $x_1 = x_2 = \frac{2a}{2a(a+1)} = \frac{1}{a+1}$ a $x_3 = \frac{-2a}{2a(a+1)} = -\frac{1}{a+1}$. Konečně standardním postupem zjistíme, že soustava pro $a = -1$ nemá řešení a pro $a = 0$ leží všechna řešení v množině $(1, 0, 0)^T + \text{LO}\{(0, 1, -1)^T\}$. \square

Další úlohy

- Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $(1, 3, 2, 1)^T$, $(3, 0, 1, 1)^T$, $(1, 4, 2, 4)^T$ lineárně závislá ve vektorovém prostoru \mathbf{R}^4 , C^4 , \mathbb{Z}_5^4 a \mathbb{Z}_7^4 .
- Určete bázi a dimenzi podprostoru $\text{LO}\{(1, 3, 2, 1)^T, (3, 0, 1, 1)^T, (1, 4, 2, 4)^T\}$ vektorových prostorů \mathbf{R}^4 , C^4 , \mathbb{Z}_5^4 a \mathbb{Z}_7^4 .
- Najděte všechny podmnožiny množiny $X = \{(1, 2, 1, 1)^T, (3, 1, 3, 3)^T, (2, 4, 2, 2)^T, (1, 0, 1, 3, 2)^T\}$, které tvoří bázi podprostoru $U = \text{LO}X$ vektorových prostorů Q^5 , \mathbb{Z}_5^5 , \mathbb{Z}_7^5 .
- Kolik existuje bází podprostoru $\text{LO}\{(1, 1, 2, 0)^T, (4, 1, 3, 1)^T, (1, 3, 2, 1)^T\}$ vektorových prostorů \mathbb{Z}_5^4 a \mathbb{Z}_7^4 ?
- Určete dimenze podprostorů U , V , $U + V$ a $U \cap V$ vektorových prostorů \mathbb{Z}_5^4 nad tělesem \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7^4 nad tělesem \mathbb{Z}_7 , jestliže $U = \text{LO}\{(1, 2, 1, 3)^T, (1, 2, 4, 1)^T, (3, 4, 1, 0)^T\}$ a $V = \text{LO}\{(4, 1, 2, 3)^T, (0, 3, 3, 1)^T, (1, 2, 1, 3)^T\}$.
- Uvažujme v vektorovém prostoru \mathbb{Z}_5^3 nad tělesem \mathbb{Z}_5 posloupnosti vektorů

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), B_2 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right),$$

$$B_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), B_4 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

a označme B_0 kanonickou bázi vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^3 nad tělesem \mathbb{Z}_5 .

- Ověřte, že je B_i pro každé $i = 1, 2, 3, 4$ báze \mathbb{Z}_5^3 ,
- najděte matice přechodu $[\text{Id}]_{B_j}^{B_i}$ pro všechna $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
- najděte pro každé $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ báze C a D , aby

$$[\text{Id}]_C^{B_i} = [\text{Id}]_{B_i}^D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Určete nad tělesy \mathbf{R} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 hodnotu matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, matice $A + A$ a $A \cdot A$.

8. Najděte nad tělesy \mathbf{R} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 všechna řešení homogenní soustavy rovnic s maticí A z předchozí úlohy.

9. Najděte nad tělesy Q , \mathbb{Z}_3 a \mathbb{Z}_7 všechna řešení nehomogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$.
10. Je-li podprostor $\mathbf{U} = \text{LO}\{(2, 4, 0, 1, 4)^T, (1, 2, 1, 0, 3)^T\}$ vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^5 nad tělesem \mathbb{Z}_5 , najděte bázi nějakého takového podprostoru \mathbf{V} , aby $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbb{Z}_5^5$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$.
11. Uvažujme podprostor $\mathbf{W} = \text{LO}\{(1, 6, 2, 4, 5)^T\}$ vektorového prostoru \mathbb{Z}_7^5 nad tělesem \mathbb{Z}_7 . Najděte báze nějakých takových podprostorů \mathbf{U} a \mathbf{V} , aby $\dim(\mathbf{U})^T = \dim(\mathbf{V})^T = 3$, $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbb{Z}_7^5$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \mathbf{W}$.
12. Kolika způsoby lze lineárně nezávislou posloupnost $((1, 2, 2, 1)^T, (2, 1, 1, 0)^T)$ doplnit na bázi (chápanou jako posloupnost, tj. záleží na pořadí prvků) vektorového prostoru \mathbb{Z}_3^4 ?
13. Buď $k \leq n$ přirozená čísla, p prvočíslo a \mathbf{U} podprostor dimenze k vektorového prostoru \mathbb{Z}_p^n nad tělesem \mathbb{Z}_p . Určete kolik existuje podprostorů \mathbf{V} prostoru \mathbb{Z}_p^n , pro něž platí, že $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbb{Z}_p^n$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$.
14. Dokažte, že lze nad tělesem \mathbb{Q} převést posloupností elementárních řádkových úprav matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ na matici $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
15. Uvažujme matice A a B z předchozího příkladu. Najděte nějakou posloupností elementárních řádkových úprav, pomocí nichž lze převést matici A na matici B .
16. Nechť $f: \mathbb{Z}_7^4 \rightarrow \mathbb{Z}_7^3$ je zobrazení určené předpisem $g((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4, 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4, 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4)$. Spočítejte dimenze a báze jádra $\text{Ker } f$ a obrazu $\text{Im } f$, rozhodněte, zda $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in \text{Im } f$ a najděte matice $[f]_{K_3}^{K_4}$, $[f]_{K_3}^B$, $[f]_C^{K_4}$ a $[f]_C^B$, jestliže K_3 a K_4 jsou kanonické báze a $B = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
17. Spočítejte determinant matic $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, A^{-1} , $A \cdot B$ a $A \cdot B^{-1}$ nad tělesy \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 .
18. Najděte pro libovolná $a \in Q$ nad Q rekurentní vzorec pro výpočet determinant čtvercové matice $G_n = (g_{ij})$ stupně n , kde $g_{ii} = 1$, $g_{ii+1} = a$ a $g_{i+1i} = b$ a jinde je $g_{ij} = 0$.
19. Rozhodněte, zda jsou nad tělesy Q , \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 regulární matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a B^3 .
20. Najděte nad tělesy Q , \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 adjungované matice k maticím z předchozí úlohy.
21. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ je nad \mathbb{Z}_7 matice $\begin{pmatrix} a & 2+a & 1 \\ 3a+2 & 1 & a \\ 2a^2 & a+6 & 2+a \end{pmatrix}$ regulární.
22. Najděte pro všechna $a \in \mathbb{Z}_7$, pro něž je to možné, inverzní matici k matici z předchozí úlohy.
23. Spočítejte $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1}$ nad tělesy \mathbb{R} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 .