PÍSEMKY Z LINEÁRNÍ ALGEBRY 2

Úloha 1 (5.3)**.** (cvičení od 9:00): Mějme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném lineárním prostoru $\mathbb{R}^4$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Spočítejte $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, a najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^4$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

(cvičení od 10:40): Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Spočítejte $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, a najděte báze podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou kolmé a) na $\mathbf{u}$ a b) na $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

Řešení.
(cvičení od 9:00):
Vypočítáme nejprve podle definice normy a skalární součin:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+2^2} = \sqrt{7}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2+2^2+0^2+1^2} = \sqrt{14},$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1\cdot 3 + 1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 7.$$

Označíme-li φ úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, okamžitě dostáváme hodnotu

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a proto $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dále hledáme bázi množiny všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}^T\\ \mathbf{v}^T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1&2\\3&2&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&3&5\end{pmatrix}.$$

Vidíme, že požadovanou bází je například posloupnost $\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-5\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

(cvičení od 10:40):
Vypočítáme nejprve podle definice normy a skalární součin:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6},$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 1 = -3.$$

Označíme-li φ úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, snadno spočítáme hodnotu

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

a tudíž $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Nyní hledáme bázi množiny všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $(1, -2, 1)$, již tvoří posloupnost $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, a dále řešíme soustavu lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}^T\\ \mathbf{v}^T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix}.$$

Vidíme, že hledanou jednoprvkovou bázi tvoří například vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. □

Úloha 2 (12.3)**.** (cvičení od 9:00): Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jeho podprostor $U = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$. Najděte vektor $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $\begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$.

(cvičení od 10:40): Uvažujme standardní skalární součin na reálném aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ a posloupnost vektorů:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Ověřte, že $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^4$, spočítejte souřadnice $[\mathbf{c}]_B$, a určete ortogonální projekci vektoru $\mathbf{c}$, do podprostoru $U = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle$.

Řešení.
(cvičení od 9:00):

Označme nejprve $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix}$. Hledáme takové skaláry $x, y \in \mathbb{R}$, aby byla lineární kombinace $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{v} - x\,\mathbf{u}_1 - y\,\mathbf{v}_2$ kolmá na oba vektory $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$, což vede k soustavě rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c}\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}\\ \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c}6 & 5 & 9\\ 5 & 6 & 13\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -4\\ 0 & 11 & 33\end{array}\right).$$

Vidíme že $y = 3$ a $x = -1$, proto $\mathbf{u} = -1\,\mathbf{u}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 = -\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$ a $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{u} = \begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$.

(cvičení od 10:40):

Nejprve přímočaře spočteme

$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i = \frac{4 \cdot 1^2}{2 \cdot 2} = 1$ pro všechna i a

$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \frac{1+1-1-1}{2 \cdot 2} = 0$ pro všechna $i < j$,

tedy B je ortonormální posloupnost, a tudíž i báze $\mathbb{R}^4$. Dále spočítáme Fourierovy koeficienty vektoru $\mathbf{c}$ vzhledem k bázi B:

$$[\mathbf{c}]_B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b}_4 \cdot \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá určit ortogonální projekci pomocí druhé a třetí složky souřadnicového vektorů jako

$$\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{b}_2 - 2 \cdot \mathbf{b}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 3 (19.3). (cvičení od 9:00): Najděte ortonormální bázi podprostoru $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ lineárního prostoru $\mathbb{R}^4$ standardním skalárním součinem.

(cvičení od 10:40): Najděte QR rozklad reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení.

(cvičení od 9:00):

Nejprve najdeme bázi U, snadno nahlédneme, že posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze, z níž ortonormální bázi vytvoříme pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace:

1. Protože $\| \mathbf{v}_1 \| = \sqrt{3}$, je $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Dále spočítáme skalární součin $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \sqrt{3}$ a použijeme druhý krok algoritmu $\mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tedy $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, neboť $\| \mathbf{v}_2' \| = \sqrt{3}$.

3. Nyní nejprve spočítáme skalární součiny $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \sqrt{3}$ a $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$ a poté zjistíme, že $\mathbf{v}_3' = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$, a proto $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Našli jsme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix})$ prostoru U.

(cvičení od 10:40):

Označíme-li si $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ sloupce matice $\mathbf{A}$, pak potřebujeme vytvořit Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací ortonormální bázi $(\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2,\ \mathbf{q}_3)$. Hledané matice rozkladu bude tvořit matice $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1|\mathbf{q}_2|\mathbf{q}_3)$ a horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{R} = (r_{ij})$, kterou určí údaje získané Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací $r_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{a}_j$ pro $i < j$ a $r_{ii} = \|\mathbf{q}_i'\|$. Tedy počítáme:

1. $r_{11} = \|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{6}$ a $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.
2. Dále spočítáme $r_{12} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{4}{\sqrt{6}}$ a použijeme druhý krok algoritmu $\mathbf{q}_2' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, tedy $r_{22} = \|\mathbf{q}_2'\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.
3. Konečně $r_{13} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}$ a $r_{23} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ a tudíž dostáváme $\mathbf{q}_3' = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ a dále $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, neboť $r_{33} = \|\mathbf{q}_3'\| = \sqrt{2}$

Spočítali jsme, že $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$ pro $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$ $\mathbf{R} = \begin{pmatrix}\sqrt{6} & \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}$.

□

Úloha 4 (26.3). (cvičení od 9:00): Najděte matici ortogonální projekce reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem na přímku $\langle\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\rangle$ vzhledem ke kanonickým bázím.

(cvičení od 10:40): Pro reálnou matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\\3 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}$ a vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$ najděte metodou nejmenších čtverců přibližné řešení soustavy rovnic $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{v}$.

Řešení.
(cvičení od 9:00):

Nejprve vezmeme ortonormální bázi $B = (\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})$ prostoru $\mathbb{R}^2$, jejíž první vektor generuje právě přímku $\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, Protože víme, že $[P]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, zbývá spočítat spočítáme matici $[P]_{K_2}^{K_2} = [\mathrm{Id}]_{K_2}^{B}[P]_B^B[\mathrm{Id}]_B^{K_2}$. Při výpočtu použijeme fakt, že je matice přechodu $[\mathrm{Id}]_B^{K_2}$ je ortogonální, tedy

$$[P]_{K_2}^{K_2} = [\mathrm{Id}]_{K_2}^{B}[P]_B^B([\mathrm{Id}]_{K_2}^{B})^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(cvičení od 10:40):

Nejprve spočítáme Grammovu matici nové soustavy

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{A}|\mathbf{A}^*\,\mathbf{v}) = \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 8 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

a tu je triviální vyřešit:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 15 & 8 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

Zjistili jsme, že hledané přibližné řešení je právě $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. □

Úloha 5 (2.4.). (cvičení od 9:00): Spočítejte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory lineárního operátoru φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2 a najděte bázi B a matici $[\varphi]_B$, aby byla $[\varphi]_B$ diagonální.

(cvičení od 10:40): Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ a určete regulární matici $\mathbf{R}$ a diagonální matici $\mathbf{D}$ splňující $\mathbf{D} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}$.

Řešení.
(cvičení od 9:00):

Abychom našli vlastní čísla lineárního operátoru φ, spočítáme nejprve charakteristický polynom jeho matice

$$\det([\varphi]_{K_2} - \lambda\mathbf{I}_2) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda+1)(\lambda-7).$$

Vlastní čísla matice $[\varphi]_{K_2}$ jsou kořeny charakteristického polynomu, tedy

$$\lambda \in \{-1, 7\}.$$

Nyní dosadíme do matice $[\varphi]_{K_2} - \lambda\mathbf{I}_2$ nalezená vlastní čísla a řešíme homogenních soustav rovnic s maticemi, která tvoří právě souřadnicové vektory vlastních vektorů operátoru φ:

$$[\varphi]_{K_2} + 1 \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad [\varphi]_{K_2} - 7 \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Snadno najdeme všechna řešení obou soustav, která jsou právě množinou

$$\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

všech vlastních vektorů φ. Protože z vlastních vektorů můžeme sestavit bázi $B = (\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$, dostáváme přímočaře odpověď na druhou otázku, protože $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi B.

(cvičení od 10:40):
Vlastní čísla spočítáme jako kořeny charakteristického polynomu matice

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda - 21 = (\lambda - 3)(\lambda - 7),$$

tedy vidíme, že $\lambda \in \{3, 7\}$.

Abychom našli vlastní vektory, musíme vyřešit homogenní soustavy rovnic s maticemi

$$\mathbf{A} - 3 \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} - 7 \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obvyklým způsobem soustavy vyřešíme a spočítáme tak množinu všech vlastních vektorů

$$\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle.$$

Definujeme-li lineární operátor ψ podmínkou $[\psi]_{K_2} = \mathbf{A}$, víme, že pro bázi $C = (\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})$ slouženou z vlastních vektorů máme $\mathbf{D} := [\psi]_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Protože $[\psi]_C = [\mathrm{Id}]_C^{K_2} [\psi]_{K_3}^{K_3} [\mathrm{Id}]_{K_2}^C$, stačí položit $\mathbf{R} := [\mathrm{Id}]_{K_2}^C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, abychom dostali $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{D} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}$. □

Úloha 6 (9.4.). (cvičení od 9:00): Uvažujme reálnou matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Spočítejte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^4$ a rozhodněte, zda jsou matice diagonalizovatelné.

(cvičení od 10:40): Je-li φ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ s maticí $[\varphi]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3, ověřte, že je φ bijekce a najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory operátorů φ a φ^{-1} a rozhodněte, zda jsou operátory diagonalizovatelné.

Řešení.
(cvičení od 9:00):
Nejprve určíme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3)=\det\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 1\\ 2 & 3-\lambda & 2\\ 2 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda(\lambda^2-4\lambda-5)=-\lambda(\lambda-5)(\lambda+1),$$

tedy vidíme, že vlastní čísla jsou právě$\lambda\in\{0,-1,5\}$. Pro nalezení vlastních vektorů řešíme homogenní soustavy rovnic s maticemi

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&3&2\\2&1&1\end{pmatrix},\mathbf{A}+1\cdot\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\2&1&2\end{pmatrix},\mathbf{A}-5\cdot\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}-5&2&1\\2&-2&2\\2&1&-4\end{pmatrix}.$$

Obvyklým způsobem soustavy vyřešíme a spočítáme tak množinu všech vlastních vektorů

$$K=\langle\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}\rangle\cup\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\rangle\cup\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\rangle.$$

Protože $\mathbf{A}^4\,\mathbf{v}=\lambda^4\,\mathbf{v}$ pro každé vlastní číslo λ a jemu příslušný vlastní vektor $\mathbf{v}$, jsou $\{0,1,625\}$ všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}^4$ a množina vlastních vektorů zůstává stejná jako u matice $\mathbf{A}$, tedy K. Protože máme v obou případech tři různá vlastní čísla, jedná se o diagonalizovatelné matice.

(cvičení od 10:40):
Nejprve určíme charakteristický polynom Abychom našli vlastní čísla lineárního operátoru φ, spočítáme nejprve charakteristický polynom jeho matice

$$\det([\varphi]_{K_3}-\lambda\mathbf{I}_3)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&1&2\\3&1-\lambda&2\\2&1&-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2+1).$$

Dosazením za λ všech hodnot tělesa $\mathbb{Z}_5$ zjistíme, že vlastní čísla tvoří právě hodnoty $\{1,2,3\}$. Nyní dosadíme do matice $[\varphi]_{K_2}-\lambda\mathbf{I}_2$ nalezená vlastní čísla a řešíme homogenních soustav rovnic s maticemi,

$$[\varphi]_{K_3}-1\cdot\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}4&1&2\\3&0&2\\2&1&4\end{pmatrix},\quad[\varphi]_{K_3}-2\cdot\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}3&1&2\\3&4&2\\2&1&3\end{pmatrix},\quad[\varphi]_{K_3}-3\cdot\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&3&2\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

Nalezené souřadnicové vektory jsou právě všechny vlastní vektory operátoru φ:

$$K=\langle\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\rangle\cup\langle\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\rangle\cup\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\rangle.$$

Máme spočítáno, že nula není vlastní číslo, proto je jádro operátoru nulové a tudíž je φ bujektivn9. Protože $\lambda\varphi^{-1}(\mathbf{v})=\varphi^{-1}(\lambda\,\mathbf{v})=\mathbf{v}$ pro každé vlastní číslo λ a jemu příslušný vlastní vektor $\mathbf{v}$, jsou $\{1^{-1},2^{-1},3^{-1}\}=\{1,3,2\}$ opět všechna vlastní čísla matice lineárního operátoru φ^{-1} a také množina vlastních vektorů zůstává stejná, t.j. K. Jelikož máme v obou případech tři různá vlastní čísla, jedná se o diagonalizovatelné operátory. $\square$

Úloha 7 (16.4.). (cvičení od 9:00): Je-li φ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^3$ s maticí $[\varphi]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3, najděte všechny invariantní podprostory lineárních operátorů φ a φ^2.

(cvičení od 10:40): Buď φ lineární operátor na racionálním vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$ daný obrazy $\varphi(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\varphi(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ a $\varphi(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$. Najděte všechny invariantní podprostory lineárních operátorů φ a φ^{100}.

Řešení.

(cvičení od 9:00):

Nejprve poznamenejme, že $\{\mathbf{o}\}$ a $\mathbf{Z}_7^3$ jsou invariantní podprostory obou endomorfismů φ i φ^2. Zbývá najít všechny invariantní podprostory dimenze 1 a 2.

Snadno přímo z (trojúhelníkové) matice zjistíme, že φ má vlastní čísla $1, 2, 5$, tedy se jedná o diagonalizovatelný endomorfismus. Obvyklým způsobem spočítáme vlastní vektory:

$$\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle$$

Tedy φ má právě 3 invariantní přímky a právě 3 invariantní roviny:

$$\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle,\ \ \langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle.$$

Protože $2^2 = 5^2 = 4$ a $1^2 = 1$ má lineární operátor φ^2 pouze dvě vlastní čísla. Vlastní číslo 4 má ovšem geometrickou násobnost 2, proto podprostor vlastních vektorů pro něj tvoří $\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle$.

Proto má φ^2 invariantní přímky (je jich 9)

$$\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{v} \rangle, \text{ kde} \quad \mathbf{v} \in \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle \setminus \{\mathbf{o}\}.$$

a invariantní roviny (opět je jich 9) φ^2 jsou:

$$\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v} \rangle, \text{ kde} \quad \mathbf{v} \in \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle \setminus \{\mathbf{o}\}.$$

(cvičení od 10:40):

Nejprve poznamenejme, že $\{\mathbf{o}\}$ a $\mathbf{Z}_7^3$ jsou invariantní podprostory obou endomorfismů φ a φ^{100}. Zbývá najít všechny invariantní podprostory dimenze 1 a 2.

Nejprve si hned z definice φ všimněme, že báze $B = (\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix})$ sestává z vlastních vektorů a $[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Proto $[\varphi^{100}]_B^B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{100}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Odtud vidíme, že $1, 2, -1$ jsou vlastní čísla endomorfismu φ a $1, 2^{100}$ jsou vlastní čísla endomorfismu φ^{100} Tedy φ má právě 3 invariantní přímky a právě 3 invariantní roviny:

$$\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \rangle,\quad \langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \rangle.$$

Protože vlastní číslo 1 lineární operátor φ^{100} má geometrickou násobnost 2, je množina všech vlastních vektorů φ^{100} tvaru $\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle \setminus \{\mathbf{o}\}$.

Tudíž má φ^{100} nekonečně invariantních přímek

$$\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{v} \rangle,\ \text{kde} \quad \mathbf{v} \in \langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \rangle \setminus \{\mathbf{o}\}.$$

a nekonečně invariantních rovin

$$\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v} \rangle,\ \text{kde} \quad \mathbf{v} \in \langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \rangle \setminus \{\mathbf{o}\}.$$

□

Úloha 8 (23.4)**.** (cvičení od 9:00): Najděte Jordanův kanonický tvar komplexní matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3&-2\\2&7\end{pmatrix}$, spočítejte regulární komplexní matici $\mathbf{P}$, aby $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ byla Jordanova a součin $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ určete.

(cvičení od 10:40): Najděte Jordanův kanonický tvar komplexní matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$, určete regulární komplexní matici $\mathbf{P}$, aby $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$ byla Jordanova.

Řešení.

(cvičení od 9:00):

Nejprve spočítáme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ a zjistíme, že $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$. Protože je navíc hodnost matice $\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_2$ rovna 1, má vlastní číslo 5 algebraickou násobnost 2 a geometrickou násobnost 1. To nutně znamená, že Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$ má na diagonále vlastní číslo 5 geometrické násobnosti 1, tedy Jordanův kanonický tvar představuje právě matice $\mathbf{J} = \begin{pmatrix}5&1\\0&5\end{pmatrix}$.

Nyní nejprve hledáme vlastní vektor matice $\mathbf{A}$, jímž je například $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, který řeší homogenní soustavu s maticí $\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ a poté počítáme nehomogenní soustavu rovnic s maticí $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$, kterou řeší například vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Spočítali jsme Jordanův řetízek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, proto je hledaná matice například tvaru $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{K_2}^{(\mathbf{v}_i)} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Konečně ze způsobu, jak jsme matici $\mathbf{P}$ získali, okamžitě plyne rovnost $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(cvičení od 10:40):

Spočítáme-li charakteristický polynom $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}_2) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ matice $\mathbf{B}$, vidíme, že 1 je jediné vlastní číslo $\mathbf{A}$ algebraické násobnosti 2. Protože matice $\mathbf{B}$ není diagonální, jedná se o vlastní číslo geometrické násobnosti 1. To znamená, že Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$ má na diagonále vlastní číslo 1 geometrické násobnosti 1, a proto je jím právě matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nyní nejprve hledáme vlastní vektor matice, který řeší homogenní soustavu s maticí $\mathbf{B} - 1\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B}$, jímž je například $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, a poté počítáme nehomogenní soustavu rovnic s maticí $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$. Druhý hledaný bazický vektor je tudíž například vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Spočítali jsme Jordanův řetízek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, proto je hledaná matice například tvaru $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{K_2}^{(\mathbf{v}_i)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. □

Úloha 9 (30.4). (cvičení od 9:00): Najděte Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$, rozhodněte, zda jsou matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^{-1}$ podobné a spočítejte $\mathbf{A}^{100}$.

(cvičení od 10:40): Je-li $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem $\mathbf{Z}_5$, rozhodněte, zda a) existuje takové přirozené n, že $\mathbf{B}^n = \mathbf{0}$ b) $\mathbf{B}^{100} = \mathbf{0}$.

Řešení.

(cvičení od 9:00):

Vidíme, že charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ je $(\lambda - 4)^2(\lambda - 1)$, proto je Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$ jedna z matic

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistíme-li, že $\operatorname{rank}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3) = 2 = \operatorname{rank}(\mathbf{J}_2 - 4\mathbf{I}_3)$, pak nutně Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$ tvoří právě matice $\mathbf{J}_2$. Protože $4^{-1} = 4$, má matice $\mathbf{A}^{-1}$ stejná vlastní čísla ve stejné algebraické a geometrické násobnosti, proto je Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}^{-1}$ opět matice $\mathbf{J}_2$, tudíž jsou matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^{-1}$ podobné.

Konečně spočítejme nejprve

$$\mathbf{J}_2^{100} = \begin{pmatrix} 4^{100} & \binom{100}{1}4^{99} & 0 \\ 0 & 4^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože existuje regulární matice $\mathbf{P}$, pro níž

$$\mathbf{A}^{100} = \mathbf{P}\mathbf{J}_2^{100}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{I}_3\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}_3,$$

je matice $\mathbf{A}^{100}$právě jednotková.

(cvičení od 10:40):

Potřebujeme spočítat charakteristický polynom matice $\mathbf{B}$:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 4 & 2-\lambda & 3 \\ 4 & 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)^2 + 2 + 3 + 2(\lambda - 1) + (2+4)(\lambda - 2) = -\lambda^3.$$

Protože má matice $\mathbf{B}$ vlastní číslo nula algebraické násobnosti 3, je nutně nilpotentní, tedy existuje číslo přirozené n, že $\mathbf{B}^n = \mathbf{0}$. Navíc víme, že určitě $\mathbf{B}^3 = \mathbf{0}$, tedy rovněž $\mathbf{B}^{100} = \mathbf{0}$. □

Úloha 10 (7.5)**.** (cvičení od 9:00): Ukažte, že je reálná matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ unitárně diagonalizovatelná, najděte reálnou ortogonální matici $\mathbf{U}$, pro níž je $\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U}$ diagonální a součin $\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U}$ určete.

(cvičení od 10:40): Uvažujme endomorfismus $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Najděte takovou ortonormální bázi B, aby byla matice $[\varphi]_B^B$ diagonální a tuto matici najděte.

Řešení.

(cvičení od 9:00):

Matice $\mathbf{A}$ je zjevně symetrická, proto normální a tedy unitárně diagonalizovatelná. Matice je navíc singulární, proto je 0 její vlastní číslo. Vidíme, že je vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kolmý na dvoudimenzionální podprostor vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 0, tedy se jedná o vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu

$$(3,3,3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9.$$

Snadno také najdeme kolmé vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 0 nejprve najdeme jeden nenulový vektor kolmý na vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, tedy jedno netriviální řešení homogenní soustavy s maticí $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, jímž je například vektor $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ a poté hledáme nenulový vektor kolmý na nalezené dva vlastní vektory, tedy jedno netriviální řešení homogenní soustavy s maticí $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, jímž je například vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Nyní zbývá nalezené ortogonální vlastní vektory normovat a sestavit do sloupců matice $\mathbf{U} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$. Nakonec (samozřejmě bez počítání) určíme diagonální matici s vlastními čísly na diagonále

$$\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\3 & 3 & 3\\3 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(cvičení od 10:40):

Nejprve určíme matici $[\varphi]^{K_3}_{K_3} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, pro níž snadno najdeme vlastní čísla 0 a -3. Nejprve najdeme normovaný vlastní vektor $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ příslušný vlastnímu číslu 0. Podprostor vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu -3, tedy prostor $\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ je zřejmě dvoudimenzionální, budeme tedy hledat dva kolmé normované vlastní vektory. Nejprve snadno najdeme jeden, například vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ a poté druhý, například $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ jako řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Našli jsme ortonormální bázi

$$B = (\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}),$$

pro níž $[\varphi]^B_B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ □