

Příklady 11.

Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do 7.5. 16:00):

Reálné číslo a nazveme *konstruovatelné*, pokud lze z úsečky délky 1 sestrojít úsečku délky a .

1. (7 bodů) Dokažte, že $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, e^{2\pi i/5})$ je rozkladové nadtěleso polynomu $x^5 - 2$ nad \mathbb{Q} . Spočtěte jeho stupeň nad \mathbb{Q} .
2. (8 bodů) Dokažte, že pravítkem a kružítkem lze sestrojít pravidelný n -úhelník právě tehdy, když je $\cos(2\pi/n)$ konstruovatelné číslo.

Všechna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace!

Další doporučené příklady na domácí počítání:

3. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{U}$ rozšíření těles, \mathbf{U} algebraické nad \mathbf{S} a \mathbf{S} algebraické nad \mathbf{T} . Je nutně \mathbf{U} algebraické nad \mathbf{T} ? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, uveďte protipříklad.
4. Buď p prvočíslo. Dokažte, že pokud lze sestrojít pravítkem a kružítkem pravidelný p -úhelník, pak $p - 1$ je mocnina dvou.
5. Dokažte, že konstruovatelná čísla tvoří podtěleso \mathbf{K} tělesa \mathbb{R} takové, že $\sqrt{a} \in K$ pro každé $a \in K$.
6. Dokažte, že každé číslo, jehož minimální polynom má stupeň 2, je konstruovatelné.
7. Uveďte číslo, jehož minimální polynom má stupeň 4, ale není konstruovatelné.