

### 3. ZÁKLADNÍ PŘÍKLADY A POZNATKY O MONOIDECH A GRUPÁCH

Napište Čínskou větu o zbytcích (pro  $\mathbb{Z}_n$ ).

Definujte Eulerovu funkci a uveďte vzorec pro její výpočet.

Definujte Eulerovu funkci a napište Eulerovu větu.

Pro daný monoid  $M(\cdot)$ , definujte grupu  $M^*(\cdot)$  invertibilních prvků.

Uveďte nějaký postup na výpočet inverzního prvku v grupě invertibilních prvků  $\mathbb{Z}_n^*(\cdot)$ .

Definujte grupu invertibilních prvků  $\mathbb{Z}_n^*(\cdot)$  monoidu  $\mathbb{Z}_n(\cdot)$ . Charakterizujte, které obsahuje prvky.

Napište nějakou množinu generátorů grupy permutací  $\mathbf{S}_n(\circ)$  velikosti  $\leq n^2$ .

Napište nějakou množinu generátorů grupy  $\mathbf{A}_n(\circ)$  (sudých permutací) velikosti  $\leq n^3$ .

Uveďte definici grupy a nějaký příklad grupy, která není komutativní.

Uveďte definici komutativní grupy a řekněte, které podgrupy komutativní grupy jsou normální.

Uveďte definici grupy a podgrupy.

Uveďte definici monoidu a příklad monoidu, který není grupou.

### 4. KONGRUENCE A HOMOMORFISMY GRUP

Napište, co rozumíme faktorovou grupou grupy  $G(\cdot)$  podle normální podgrupy  $H$ .

Napište, co rozumíme ekvivalencí  $\text{rmod } H$  na grupě  $G(\cdot)$ , kde  $H$  je její podgrupa.

Napište Lagrangeovu větu. Co přesně značí  $[G : H]$ ?

Jaký je vztah řádu grupy a řádů jejích podgrup?

Definujte podgrupu a normální podgrupu.

Definujte normální podgrupu a homomorfismus grup.

Uveďte definici faktorové grupy (včetně značení a definice operací).

Uveďte větu o homomorfismu pro grupy.

Uveďte 1. větu o izomorfismu pro grupy.

Uveďte 2. větu o izomorfismu pro grupy.

Definujte relaci  $\text{rmod } H$  pro danou podgrupu  $H$ .

Definujte relaci  $\text{lmod } H$  pro danou podgrupu  $H$ .

Kdy je relace  $\text{rmod } H$  kongruence na grupě  $G(\cdot)$ ?

Kdy relace  $\text{rmod } H$  a  $\text{lmod } H$  na grupě  $G(\cdot)$  splývají?

Popište pomocí podgrup všechny ekvivalence slučitelné s grupovou operací.

Najděte grupu  $G(\cdot)$  a její podgrupu  $H$ , aby relace  $\text{rmod } H$  nebyla slučitelná s  $\cdot$ .

Existuje mezi každou dvojicí grup nějaký homomorfismus? Stručně zdůvodněte.

Existuje nekonečná grupa, která obsahuje jen jednu normální podgrupu? Stručně zdůvodněte.

### 5. PŘÍKLADY GRUP A PODGRUP

Může mít komutativní grupa nekomutativní vlastní podgrupu? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Může mít nekomutativní grupa komutativní vlastní podgrupu? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Je grupa permutací  $\mathbf{S}_3(\circ)$  komutativní? Stručně zdůvodněte.

Je grupa  $\mathbf{A}_4(\circ)$  (=sudé permutace) komutativní? Stručně zdůvodněte.

Je grupa  $\mathbf{A}_3(\circ)$  (=sudé permutace) komutativní? Stručně zdůvodněte.

Je aditivní grupa  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(+)$  komutativní? Stručně zdůvodněte.

Je  $\{0, 1, -1\}(\cdot)$  grupa? Stručně zdůvodněte.

Je  $\{1, -1\}(\cdot)$  grupa? Stručně zdůvodněte.

Tvoří matice s násobením grupu? Stručně zdůvodněte.

- Tvoří všechny funkce  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se skládáním grupu? Stručně zdůvodněte.
- Uved'te všechny (až na izomorfismus) grupy prvočíselné velikosti  $p$ .
- Uved'te všechny (až na izomorfismus) grupy velikosti 2,3,4,5,6.
- Napište aspoň tři neizomorfní osmiprvkové grupy.
- Napište aspoň dvě neizomorfní devítiprvkové grupy.
- Napište aspoň dvě neizomorfní desetiprvkové grupy.
- Napište aspoň dvě neizomorfní 24-prvkové grupy.
- Napište aspoň tři neizomorfní 12-prvkové grupy.
- Rozhodněte, zda iracionální čísla tvoří podgrupu grupy  $\mathbb{C}(+)$ . Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda iracionální čísla tvoří podgrupu grupy  $\mathbb{C}^*(\cdot)$ . Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda celá čísla tvoří podgrupu grupy  $\mathbb{C}(+)$ . Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda celá čísla tvoří podgrupu grupy  $\mathbb{C}^*(\cdot)$ . Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda racionální čísla tvoří podgrupu grupy  $\mathbb{R}(+)$ . Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda kladná čísla tvoří podgrupu grupy  $\mathbb{R}(+)$ . Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda kladná čísla tvoří podgrupu grupy  $\mathbb{R}^*(\cdot)$ . Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda tvoří sudá celá čísla podgrupu grupy  $\mathbb{Q}(+)$ ? Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda tvoří sudá čísla podgrupu grupy  $\mathbb{Q}^*(\cdot)$ ? Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda přirozená čísla tvoří podgrupu grupy  $\mathbb{Q}(+)$ . Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda permutace splňující  $\pi^2 = id$  tvoří podgrupu grupy  $\mathbf{S}_3(\circ)$ .
- Rozhodněte, zda liché permutace tvoří podgrupu grupy  $\mathbf{S}_n(\circ)$ .
- Rozhodněte, zda tvoří množina  $\{1, 7\}$  podgrupu grupy  $\mathbb{Z}_8^*(\cdot)$ ? Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda tvoří množina  $\{1, 3\}$  podgrupu grupy  $\mathbb{Z}_{10}^*(\cdot)$ ? Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda tvoří množina  $\{1, 2, 4, 5, 10\}$  podgrupu grupy  $\mathbb{Z}_{11}^*(\cdot)$ ? Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda tvoří množina  $\{1, 3, 9\}$  podgrupu grupy  $\mathbb{Z}_{13}^*(\cdot)$ ? Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda tvoří množina  $\{1, 4, 7\}$  podgrupu grupy  $\mathbb{Z}_9^*(\cdot)$ ? Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda tvoří množina  $\{1, 5\}$  podgrupu grupy  $\mathbb{Z}_{12}^*(\cdot)$ ? Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda lichá čísla tvoří podgrupu grupy  $\mathbb{Z}(+)$ ? Stručně zdůvodněte.
- Napište, jak vypadají všechny podgrupy grup  $\mathbb{Z}_n(+)$ .
- Napište, jak vypadají všechny podgrupy grupy  $\mathbb{Z}(+)$ .
- Rozhodněte, zda diagonální matice tvoří podgrupu grupy  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})(\cdot)$ . Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda horní trojúhelníkové matice tvoří podgrupu grupy  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})(\cdot)$ . Stručně zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda dolní trojúhelníkové matice tvoří podgrupu grupy  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})(\cdot)$ . Stručně zdůvodněte.

## 6. CYKLICKÉ GRUPY

- Definujte cyklickou grupu.
- Uved'te všechny (až na izomorfismus) cyklické grupy.
- Nechť  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Za jakých podmínek  $\langle k \rangle = \mathbb{Z}_n$ ? Kolik podgrup řádu  $k$  má grupa  $\mathbb{Z}_n$ ?
- Kolik existuje podgrup konečné cyklické grupy?
- Kolik generátorů obsahuje konečná a kolik nekonečná cyklická grupa?
- Stručně popište protokol RSA
- Existuje nějaká nekomutativní cyklická grupa? Stručně zdůvodněte.
- Existují dvě neizomorfní cyklické grupy řádu 57894212? Stručně zdůvodněte.
- Existují dvě neizomorfní cyklické grupy řádu  $2^{2222}$ ? Stručně zdůvodněte.
- Existují dvě neizomorfní nekonečné cyklické grupy? Stručně zdůvodněte.
- Existuje podgrupa či faktorová grupa cyklické grupy, která není cyklická? Stručně zdůvodněte.
- Obsahuje každá aspoň dvouprvková konečná grupa nějakou konečnou aspoň dvouprvkovou cyklickou podgrupu? Stručně zdůvodněte.

Obsahuje každá nekonečná grupa nekonečnou cyklickou podgrupu? Stručně zdůvodněte.

## 7. ALGEBRY

Uveďte definici algebry a podalgebry.

Uveďte definici homomorfismu mezi algebry  $A(\alpha_i \mid i \in I)$  a  $B(\alpha_i \mid i \in I)$ .

Uveďte definici izomorfismu mezi algebry  $A(\alpha_i \mid i \in I)$  a  $B(\alpha_i \mid i \in I)$ .

Pro jaké algebry je prázdná množina podalgebrou?

Co znamená, že množina  $X$  generuje algebru  $A(\alpha_i \mid i \in I)$ ?

Co znamená, že jsou algebry izomorfní?

Co znamená, že jsou algebry stejného typu?

Definujte uzávěrový systém.

Tvoří množina všech podmnožin neprázdné množiny uzávěrový systém? Stručně zdůvodněte.

Existuje jednoprvkový uzávěrový systém na dané neprázdné množině? Stručně zdůvodněte.

Uveďte aspoň tříprvkový příklad uzávěrového systému.

Existuje vždy nějaký homomorfismus algebry do sebe? Stručně zdůvodněte.

Existuje vždy nějaký izomorfismus algebry do sebe? Stručně zdůvodněte.

Existuje mezi každou dvojicí algeber stejného typu nějaký homomorfismus? Stručně zdůvodněte.

Existuje nekonečná algebra obsahující jedinou podalgebru? Stručně zdůvodněte.

## 8. KONGRUENCE NA ALGEBRÁCH

Uveďte definici faktorové algebry (včetně značení a definice operací).

Definujte kongruenci na algebře.

Uveďte definici faktorové kongruence na algebře.

Je průnik dvou kongruencí na algebře vždy kongruence? Stručně zdůvodněte.

Je sjednocení dvou kongruencí na algebře vždy kongruence? Stručně zdůvodněte.

Definujte slučitelnost ekvivalence s  $n$ -ární operací. Je každá ekvivalence slučitelná s každou nulární operací?

Definujte slučitelnost ekvivalence s  $n$ -ární operací. Je každá ekvivalence slučitelná s každou unární operací?

Uveďte větu o homomorfismu pro algebry.

Uveďte 1. větu o izomorfismu pro algebry.

Uveďte 2. větu o izomorfismu pro grupy i algebry.

Uveďte příklady aspoň dvou kongruencí na desetiprvkové algebře.

Uveďte příklady aspoň dvou kongruencí na nekonečné algebře.

Existuje nekonečná algebra, na níž je pouze jedna kongruence? Stručně zdůvodněte.

Existuje nekonečná algebra, na níž je každá ekvivalence kongruencí? Stručně zdůvodněte.

Kolik existuje pro daný typ neizomorfních konečných algeber, na nichž je pouze jedna kongruence? Stručně zdůvodněte.

## 9. (NE)IZOMORFNÍ ALGEBRY

Jsou grupy  $\mathbb{R}(+)$  a  $\mathbb{R}^+(\cdot)$  (podgrupa kladných čísel grupy  $\mathbb{R}^*(\cdot)$ ) izomorfní? Stručně zdůvodněte.

Jsou grupy  $\mathbb{R}(+)$  a  $\mathbb{R}^*(\cdot)$  izomorfní? Stručně zdůvodněte.

Jsou grupy  $\mathbb{Q}(+)$  a  $\mathbb{Q}^*(\cdot)$  izomorfní? Stručně zdůvodněte.

Jsou grupy  $\mathbb{Q}(+)$  a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(+)$  izomorfní? Stručně zdůvodněte.

Jsou grupy  $\mathbb{C}(+)$  a  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}(+)$  izomorfní? Stručně zdůvodněte.  
 Jsou grupy  $\mathbb{Z}_2(+)$  a  $\mathbb{Z}^*(\cdot)$  izomorfní? Stručně zdůvodněte.  
 Jsou grupy  $\mathbb{Z}_{29}(+)$  a  $\mathbb{Z}_{29}^*(\cdot)$  izomorfní? Stručně zdůvodněte.  
 Jsou grupy  $\mathbb{Z}_{19}(+)$  a  $\mathbb{Z}_{20}^*(\cdot)$  izomorfní? Stručně zdůvodněte.  
 Jsou grupy  $\mathbb{Z}_{12}(+)$  a  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4(+)$  izomorfní? Stručně zdůvodněte.  
 Jsou grupy  $\mathbb{Z}_{16}(+)$  a  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4(+)$  izomorfní? Stručně zdůvodněte.  
 Jsou grupy  $\mathbb{Z}_{12}(+)$  a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6(+)$  izomorfní? Stručně zdůvodněte.  
 Jsou grupy  $\mathbb{Z}_{15}(+)$  a  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5(+)$  izomorfní? Stručně zdůvodněte.  
 Jsou grupy  $\mathbb{Z}_3(+)$  a  $\mathbf{A}_3(\circ)$  (=sudé permutace) izomorfní? Stručně zdůvodněte.  
 Rozhodněte, zda jsou izomorfní monoidy  $\mathbf{N}(+)$  a  $\mathbf{N}(\cdot)$ . Stručně zdůvodněte.  
 Rozhodněte, zda jsou izomorfní monoidy  $\mathbf{Q}(\cdot)$  a  $\mathbf{N}(\cdot)$ . Stručně zdůvodněte.  
 Rozhodněte, zda jsou izomorfní monoidy  $\mathbf{Z}(+)$  a  $\mathbf{Z}(\cdot)$ . Stručně zdůvodněte.  
 Rozhodněte, zda jsou izomorfní algebry  $\mathbf{Q}(\cdot, +, 1)$  a  $\mathbf{Z}(\cdot, +, 1)$ . Stručně zdůvodněte.  
 Rozhodněte, zda jsou izomorfní monoidy  $\mathbf{N}(\cdot)$  a  $\mathbf{Z}(\cdot)$ . Stručně zdůvodněte.  
 Rozhodněte, zda jsou izomorfní algebry  $\mathbf{Q}(\cdot, +, 1)$  a  $\mathbf{Z}(\cdot, +, 1)$ . Stručně zdůvodněte.

#### 10. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI SVAZŮ

Bud'  $(X, \leq)$  uspořádaná množina a  $A \subseteq X$ . Definujte supremum množiny  $A$ .  
 Bud'  $(X, \leq)$  uspořádaná množina a  $A \subseteq X$ . Definujte infimum množiny  $A$ .  
 Bud'  $(X, \leq)$  uspořádaná množina. Definujte největší a nejmenší prvek.  
 Definujte svaz a úplný svaz pomocí relace uspořádání.  
 Uveďte definici svazu jako algebry  
 Definujte distributivní svaz.  
 Definujte Booleovu algebru.  
 Definujte komplement prvku ve svazu. Je komplement vždy nejvýše jeden? Stručně odůvodněte.  
 Definujte monotónní zobrazení a homomorfismus svazů.  
 Charakterizujte izomorfismy svazů pomocí monotonie.  
 Je každé monotónní zobrazení svazů homomorfismus? Stručně zdůvodněte.  
 Je každá monotónní bijekce mezi svazy izomorfismus? Stručně zdůvodněte.  
 Je každý homomorfismus svazů monotónní zobrazení? Stručně zdůvodněte.

#### 11. PŘÍKLADY USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN A SVAZŮ

Uveďte příklad uspořádání na dvou prvcích, které není svazem.  
 Uveďte příklad tříprvkového svazu.  
 Uveďte dva (neizomorfní) příklady čtyřprvkového svazu.  
 Uveďte lineárně uspořádanou množinu (tj.  $\forall a, b$  buď  $a \leq b$  nebo  $b \leq a$ ), která není úplným svazem.  
 Tvoří konečné podmnožiny množiny  $\mathbb{N}$  svaz vzhledem k uspořádání  $\subseteq$ ? Stručně zdůvodněte.  
 Tvoří konečné podmnožiny množiny  $\mathbb{N}$  úplný svaz vzhledem k uspořádání  $\subseteq$ ? Stručně zdůvodněte.  
 Tvoří podmnožiny množiny  $\mathbb{N}$  svaz vzhledem k uspořádání  $\subseteq$ ? Stručně zdůvodněte.  
 Je každá lineárně uspořádaná množina (tj.  $\forall a, b$  buď  $a \leq b$  nebo  $b \leq a$ ) svaz? Stručně zdůvodněte.  
 Je každá lineárně uspořádaná množina (tj.  $\forall a, b$  buď  $a \leq b$  nebo  $b \leq a$ ) úplný svaz? Stručně zdůvodněte.  
 Nakreslete nejmenší uspořádanou množinu, která není svazem.  
 Existuje svaz bez nejmenšího prvku? Stručně zdůvodněte.

Existuje úplný svaz bez nejmenšího prvku? Stručně zdůvodněte.  
 Nakreslete svaz podmnožin tříprvkové množiny.  
 Uveďte příklad osmiprvkové Booleovy algebry.  
 Uveďte příklad čtyřprvkové Booleovy algebry.  
 Uveďte příklad šestnáctiprvkové Booleovy algebry.  
 Uveďte příklad úplného svazu, který není Booleovou algebrou.  
 Nakreslete nejmenší svaz, který není Booleovou algebrou.  
 Nakreslete čtyřprvkový svaz, který není Booleovou algebrou.  
 Nakreslete osmiprvkový svaz, který není Booleovou algebrou.  
 Nakreslete svaz podmnožin tříprvkové množiny. Je to Booleova algebra? Stručně zdůvodněte.  
 Nakreslete svaz podmnožin dvouprvkové množiny. Je to Booleova algebra? Stručně zdůvodněte.

## 12. OKRUHY

Definujte těleso.  
 Definujte okruh.  
 Definujte pravý a levý ideál okruhu.  
 Definujte ideál okruhu.  
 Charakterizujte, které okruhy jsou tělesa pomocí pojmu pravý a levý ideál.  
 Uveďte příklad pravého ideálu, který není levým ideálem.  
 Uveďte příklad levého ideálu, který není pravým ideálem.  
 Uveďte příklad okruhu, který není tělesem.  
 Popište všechny ideály okruhu celých čísel.

## 13. EULEROVA FUNKCE A EUKLEIDŮV ALGORITMUS (2 BODY)

Spočtete hodnotu Eulerovy funkce  $\varphi(999)$ .  
 Spočtete  $17^{-1}$  v monoidu  $\mathbb{Z}_{28}(\cdot)$ .  
 Spočtete  $25^{-1}$  v monoidu  $\mathbb{Z}_{31}(\cdot)$ .  
 Spočtete  $13^{-1}$  v monoidu  $\mathbb{Z}_{43}(\cdot)$ .  
 Spočtete  $15^{-1}$  v monoidu  $\mathbb{Z}_{43}(\cdot)$ .  
 Spočtete  $12^{-1}$  v monoidu  $\mathbb{Z}_{31}(\cdot)$ .  
 Spočtete  $18^{-1}$  v monoidu  $\mathbb{Z}_{31}(\cdot)$ .  
 Spočtete  $19^{-1}$  v monoidu  $\mathbb{Z}_{32}(\cdot)$ .  
 Kolik invertibilních prvků obsahuje monoid  $\mathbb{Z}_{576}(\cdot)$ .  
 Kolik invertibilních prvků obsahuje monoid  $\mathbb{Z}_{888}(\cdot)$ .  
 Kolik invertibilních prvků obsahuje monoid  $\mathbb{Z}_{1125}(\cdot)$ .  
 Kolik invertibilních prvků obsahuje monoid  $\mathbb{Z}_{1350}(\cdot)$ .  
 Kolik generátorů obsahuje cyklická grupa řádu 1584.  
 Kolik generátorů obsahuje cyklická grupa řádu 1440.  
 Kolik generátorů obsahuje cyklická grupa řádu 775.  
 Kolik generátorů obsahuje cyklická grupa řádu 864.  
 Kolik generátorů obsahuje cyklická grupa řádu 1300.

## 14. SVAZY PODGRUP, HOMOMORFISMY CYKlickÝCH GRUP (2 BODY)

Nakreslete Hasseův diagram svazu podgrup grupy  $\mathbf{Z}_{45}(+)$ .  
 Nakreslete Hasseův diagram svazu podgrup grupy  $\mathbf{Z}_{75}(+)$ .

Nakreslete Hasseův diagram svazu podgrup grupy  $\mathbf{Z}_{16}(+)$ .  
 Nakreslete Hasseův diagram svazu podgrup grupy  $\mathbf{Z}_{30}(+)$ .  
 Nakreslete Hasseův diagram svazu podalgeber algebry  $\mathbf{Z}_{40}(+, 0)$ .  
 Nakreslete Hasseův diagram svazu podalgeber algebry  $\mathbf{Z}_{999}(+, 1)$ .  
 Kolik kongruencí existuje na algebře  $\mathbf{Z}_{24}(+)$ ?  
 Kolik kongruencí existuje na algebře  $\mathbf{Z}_{50}(+)$ ?  
 Kolik kongruencí existuje na algebře  $\mathbf{Z}_{60}(+, \cdot)$ ?  
 Kolik kongruencí existuje na algebře  $\mathbf{Z}_{90}(+, 0, 1)$ ?  
 Kolik kongruencí existuje na algebře  $\mathbf{Z}_{30}(+, 0, 1)$ ?  
 Kolik existuje homorfismů grupy  $\mathbf{Z}_{30}(+)$  do grupy  $\mathbf{Z}_{50}(+)$ ?  
 Kolik existuje homorfismů grupy  $\mathbf{Z}_{50}(+)$  do grupy  $\mathbf{Z}_{70}(+)$ ?  
 Kolik existuje homorfismů grupy  $\mathbf{Z}_{12}(+)$  do grupy  $\mathbf{Z}_{24}(+)$ ?  
 Kolik existuje prostých homorfismů grupy  $\mathbf{Z}_{30}(+)$  do grupy  $\mathbf{Z}_{90}(+)$ ?  
 Kolik existuje prostých homorfismů grupy  $\mathbf{Z}_2(+)$  do grupy  $S_4(\circ)$ ?  
 Kolik existuje prostých homorfismů grupy  $\mathbf{Z}_3(+)$  do grupy  $S_4(\circ)$ ?  
 Kolik existuje prostých homorfismů grupy  $\mathbf{Z}_4(+)$  do grupy  $S_4(\circ)$ ?  
 Kolik existuje homorfismů grupy  $\mathbf{Z}_2(+)$  do grupy  $S_4(\circ)$ ?  
 Kolik existuje homorfismů grupy  $\mathbf{Z}_3(+)$  do grupy  $S_4(\circ)$ ?

#### 15. LAGRANGEOVA VĚTA, PODGRUPY A KONGRUENCE CYKlickÝCH GRUP (2 BODY)

Kolik podgrup a kolik kongruencí má grupa  $\mathbb{Z}_{90}(+)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup a kolik kongruencí má grupa  $\mathbb{Z}_{150}(+)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup a kolik kongruencí má grupa  $\mathbb{Z}_{200}(+)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup a kolik kongruencí má grupa  $\mathbb{Z}_{320}(+)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik normálních podgrup má grupa  $\mathbf{S}_3(\circ)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup řádu 4 má grupa  $\mathbf{S}_4(\circ)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup řádu 5 má grupa  $\mathbf{S}_4(\circ)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup řádu 3 má grupa  $\mathbf{S}_5(\circ)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup řádu 4, 5 a 6 má grupa  $\mathbb{Z}_{8660}(+)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup řádu 4, 5, 6 a 7 má grupa  $\mathbb{Z}_{1200}(+)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup řádu 4, 5 a 6 má grupa  $\mathbb{Z}_{333}(+)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup řádu 13 má grupa  $\mathbb{Q}^*(\cdot)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup řádu 2 má grupa  $\mathbb{Q}^*(\cdot)$ ? Odůvodněte.  
 Kolik podgrup řádu 3 má grupa  $\mathbb{C}^*(\cdot)$ ? Odůvodněte.  
 Rozhodněte zda grupa  $\mathbf{S}_6(\circ)$  obsahuje podgrupu řádu a) 5, b) 8. Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, vysvětlete.  
 Rozhodněte zda grupa  $\mathbf{S}_5(\circ)$  obsahuje podgrupu řádu a) 5, b) 6. Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, vysvětlete.  
 Rozhodněte zda grupa  $\mathbf{S}_5(\circ)$  obsahuje podgrupu řádu a) 4, b) 7. Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, vysvětlete.  
 Rozhodněte zda grupa  $\mathbf{A}_4(\circ)$  (= sudé permutace) obsahuje podgrupu řádu a) 4, b) 5. Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, vysvětlete.  
 Rozhodněte zda grupa  $\mathbf{A}_5(\circ)$  (= sudé permutace) obsahuje podgrupu řádu a) 4, b) 5. Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, vysvětlete.

#### 16. GENERÁTORY CYKlickÝCH GRUP, PŘÍKLADY GRUP (2 BODY)

Je grupa  $\mathbf{S}_3(\circ)$  cyklická? Zdůvodněte.  
 Je grupa  $\mathbf{S}_4(\circ)$  cyklická? Zdůvodněte.

- Je grupa  $\mathbf{A}_4(\circ)$  (= sudé permutace) cyklická? Stručně zdůvodněte.
- Je grupa  $\mathbb{Q}(+)$  cyklická? Zdůvodněte.
- Je grupa  $\mathbb{Q}^*(\cdot)$  cyklická? Zdůvodněte.
- Je grupa  $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3(+)$  cyklická? Zdůvodněte.
- Je grupa  $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}(+)$  cyklická? Zdůvodněte.
- Je grupa  $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{14}(+)$  cyklická? Zdůvodněte.
- Je grupa  $\mathbb{Z}_{10}^*(\cdot)$  cyklická? Zdůvodněte.
- Je grupa  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(+)$  cyklická? Zdůvodněte.
- Je grupa  $\mathbb{Z}^*(\cdot)$  cyklická? Zdůvodněte.
- Je podgrupa  $3\mathbb{Z}$  grupy  $\mathbb{Z}(+)$  cyklická? Zdůvodněte.
- Určete řád podgrupy generované prvkem 66 v grupě  $\mathbb{Z}_{147}(+)$ .
- Určete řád podgrupy generované prvkem 102 v grupě  $\mathbb{Z}_{192}(+)$ .
- Určete řád podgrupy generované prvkem 27 v grupě  $\mathbb{Z}_{300}(+)$ .
- Generuje prvek 2 grupu  $\mathbb{Z}_9^*(\cdot)$ ? Zdůvodněte.
- Generuje prvek 2 grupu  $\mathbb{Z}_{15}^*(\cdot)$ ? Zdůvodněte.
- Generuje prvek 7 grupu  $\mathbb{Z}_{50}^*(\cdot)$ ? Zdůvodněte.
- Generuje prvek 27 grupu  $\mathbb{Z}_{152}(+)$ ? Generuje prvek 27 grupu  $\mathbb{Z}_{153}(+)$ ? Stručně zdůvodněte.
- Generuje prvek 16 grupu  $\mathbb{Z}_{170}(+)$ ? Generuje prvek 16 grupu  $\mathbb{Z}_{256}(+)$ ? Stručně zdůvodněte.
- Existuje nekomutativní 6-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.
- Existuje nekomutativní 7-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.
- Existuje nekomutativní 8-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.
- Existuje nekomutativní 12-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.
- Existuje nekomutativní 181-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.
- Existuje nekomutativní nekonečná grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.
- Existuje necyklická osmiprvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.
- Existuje necyklická 19-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.
- Existuje 99-prvková grupa obsahující podgrupu řádu 9? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.
- Existuje 60-prvková grupa, která má 15-prvkovou podgrupu? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.