ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY – CVIČENÍ

M. ZELENÝ

1. Normované lineární prostory – základní pojmy a příklady

1.1. Zopakujte si definice pojmů: normovaný lineární prostor, metrika na normovaném prostoru, Banachův prostor.

1.2. Uvažujte prostor $\mathbf{R}^n$, resp. $\mathbf{C}^n$, s normami

$$||\boldsymbol{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad p \in [1, \infty);$$
$$||\boldsymbol{x}||_\infty = \max\{|x_i|;\ i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

(i) Ověřte, že jde opravdu o normy. [Zopakujte si znění a důkaz Youngovy nerovnosti, Hölderovy nerovnosti a Minkowského nerovnosti.]

(ii) Ukažte, že pro každé $\boldsymbol{x}$ je funkce $p \mapsto ||\boldsymbol{x}||_p$ nerostoucí a $\lim_{p\to\infty} ||\boldsymbol{x}||_p = ||\boldsymbol{x}||_\infty$. Načrtněte B_X pro $X = (\mathbf{R}^2, ||\cdot||_p)$ a $p = 1, 2, 5/2, \infty$.

(iii) Ukažte, že $(\mathbf{R}^n, ||\cdot||_p)$ je separabilní Banachův prostor pro libovolné $p \in [1, \infty]$.

1.3. Uvažujte prostory $\ell_p,\ p \in [1, \infty]$, a c_0 (přesněji $\ell_p(\mathbf{N}),\ p \in [1, \infty]$, a $c_0(\mathbf{N})$).

(i) Ukažte, že prostory $\ell_p,\ p \in [1, \infty]$, a c_0 jsou Banachovy.

(ii) Ukažte, že prostor ℓ_∞ není separabilní.

(iii) Ukažte, že prostory $\ell_p,\ p \in [1, \infty)$ a c_0 jsou separabilní.

1.4. Definice prostorů $L^p(X, \mu)$, $p \in [1, \infty]$.

(i) Ukažte, že prostory $L^p(X, \mu),\ p \in [1, \infty]$ jsou Banachovy.

(ii) Ukažte, že prostor $L^\infty(0, 1)$ není separabilní.

(iii) Ukažte, že prostory $L^p(\mathbf{R}),\ p \in [1, \infty)$, jsou separabilní.

1.5. Prostor $\mathcal{C}([0, 1])$ se supremovou normou je separabilní.

1.6. Nalezněte příklad normovaného lineárního prostoru, který není Banachův.

1.7. Každá koule (otevřená či uzavřená) v normovaném lineárním prostoru je konvexní.

1.8. V normovaném lineárním prostoru platí: $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ a $\operatorname{int} \overline{B}(x, r) = B(x, r)$.

1.9. Je-li Y podprostor normovaného lineárního prostoru X, pak $\overline{Y}$ je také podprostor.

1.10. Je-li A konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, pak $\overline{A}$ je také konvexní.

1.11. Každá konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru je souvislá.

1.12. Nechť $\ell^\infty(\Gamma)$ je vektorový prostor všech reálných (komplexních) omezených funkcí na neprázdné množině Γ.

(a) Dokažte, že $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}$ je norma na $\ell^\infty(\Gamma)$.
(b) Pro jaká Γ je $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ konečně rozměrný?
(c) Pro jaká Γ je $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ separabilní?
(d) Dokažte, že normovaný lineární prostor $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný.
(e) Uvažujte podprostor $c_0(\Gamma)$ všech funkcí x, které splňují

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \{\gamma \in \Gamma;\ |x(\gamma)| > \varepsilon\} \text{ je konečná.}$$

Zkoumejte jeho úplnost a separabilitu v závislosti na Γ.

1.13. Nechť $\ell^p(\Gamma)$ je vektorový prostor všech reálných (komplexních) omezených funkcí, které splňují $\sum_\gamma |x(\gamma)|^p < \infty$. Ukažte, že $(\ell^p, ||\cdot||_p)$, kde $p \in [1, \infty)$, $||x||_p = (\sum_\gamma |x(\gamma)|^p)^{1/p}$, je Banachův prostor. Zkoumejte jeho separabilitu.

1.14. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\dim X < \infty$ a $L\colon X \to Y$ je lineární. Potom je L spojité.

1.15. Nechť X je normovaný lineární prostor a $\dim X < \infty$. Potom je B_X kompaktní.

1.16. Nechť X je normovaný lineární prostor, $\dim X < \infty$ a $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ jsou normy na X. Potom jsou tyto normy ekvivalentní.

1.17. Nechť X je normovaný lineární prostor, $\dim X < \infty$. Potom je X Banachův.

1.18. Nechť X je Banachův prostor, $\dim X = \infty$. Potom existují úplné normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na X takové, že

$$\sup\{\|x\|_1/\|x\|_2;\ x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}\} = \infty \text{ a } \sup\{\|x\|_2/\|x\|_1;\ x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}\} = \infty.$$

1.19. Nechť X je Banachův prostor, $\dim X = \infty$. Potom X nemá spočetnou algebraickou bázi.

1.20. Pro která $p \in [1, \infty]$ je norma $\|\cdot\|_p$ na ℓ_p generována skalárním součinem?

1.21. Ukažte, že $T\colon \mathbf{R}^2 \to \ell_\infty$ definované předpisem

$$T(x, y) = (x \sin \alpha_n + y \cos \alpha_n)_{n=1}^\infty,$$

kde množina $\{\alpha_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ je hustá v $[0, 2\pi]$, je lineární izometrie do ℓ_∞.

1.22. Nechť X je Banachův prostor a $\sum \|x_n\| < \infty$. Potom $\sum x_{\pi(n)}$ konverguje ke stejnému součtu pro každou permutaci π.

1.23. Nalezněte Banachův prostor X a $\sum x_n$ takovou, že

- $\sum \|x_n\| = \infty$,
- $\sum x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci π.

1.24. Nechť X je Banachův prostor, $\dim X < \infty$, $K \subset X$ je kompaktní. Potom $\operatorname{co} K$ je kompaktní.

1.25. Nalezněte Banachův prostor X a $K \subset X$ kompaktní takové, že $\operatorname{co} K$ není kompaktní.

2. Operace s Banachovými prostory

2.1. Ukažte ekvivalenci norem tvaru $p(\|x\|, \|y\|)$ na $X \times Y$, kde p je norma na $\mathbf{R}^2$.

2.2. Pro která p v předchozí úloze je norma na $X \times Y$ Hilbertova?

2.3. Ukažte, že $X \times Y$ je Banachův, právě když X, Y jsou Banachovy.

2.4. Nechť X je reálný normovaný prostor. Definujme $Y := \{x + iy : x, y \in X\}$ s normou

$$\|x + iy\|_Y := \sup\{\|(\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y\| : \alpha \in [0, 2\pi]\}.$$

Ukažte, že Y je komplexní normovaný prostor, přičemž X je jeho podprostor. Ukažte dále, že touto konstrukcí vznikne z $\mathbf{R}$ komplexní rovina $\mathbf{C}$.

3. Operátory a funkcionály

3.1. Spočtěte normu lineárního zobrazení $L : (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbf{R}^m, \|\cdot\|_1)$ s reprezentující maticí $\mathbb{A}$.

3.2. Spočtěte normu lineárního zobrazení $L : (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ s reprezentující maticí $\mathbb{A}$.

3.3. Spočtěte normu zobrazení L

- $X = \mathcal{C}([0,1])$, $Y = \mathbf{R}$, $g \in \mathcal{C}([0,1])$, $L(f) = \int_0^1 f$,
- $X = \mathcal{C}([0,1])$, $Y = \mathbf{R}$, $g \in \mathcal{C}([0,1])$, $L(f) = \int_0^1 fg$,
- $L : c_0 \to \mathbf{R}$, $L(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{n^2}$,
- $L : \ell_1 \to \mathbf{R}$, $L(x) = \sum_{n=1}^\infty (1 - \frac{1}{n})x_n$,
- $X = \mathcal{C}^1([0,1])$, $Y = \mathcal{C}([0,1])$, $L\colon X \to Y$, $L(f) = f'$,
- $f : H \to \mathbf{C}$, kde H je Hilbertův prostor a $f(x) = (x, y)$,
- $L\colon (\mathbf{R}^2, p) \to (\mathbf{R}^2, p)$, $L(x, y) = 3x + 4y$, kde norma $p = \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$,
- $L\colon L^2(0, \pi) \to \mathbf{R}$, $L(f) = \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx$,
- $L\colon \mathcal{C}([-1,1]) \to \mathbf{R}$, $L(f) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$,
- $L\colon \ell_2 \to \mathbf{R}$, $L(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{(2+\frac{1}{n})^{n/2} x_n}$,
- $L\colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbf{R}$, $L(f) = \lim \int_0^1 f(t^n)\, dt$,
- $L\colon L^p(0,1) \to \mathbf{R}$, $L(f) = \int_0^1 t f(t)\, dt$,
- $L\colon L^2(0,1) \to \mathbf{R}$, $L(f) = \int_0^1 t^{-1/5} f(t)\, dt$.

4. Hilbertovy prostory

4.1. Najděte několik různých skalárních součinů na $\mathbf{R}^n$ (na $\mathbf{C}^n$). Vysvětlete, proč normy definované každým z nich jsou ekvivalentní s eukleidovskou normou.

4.2. Spočtěte $\min_{a,b,c} \int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$.

4.3. Spočtěte $\min_{a,b,c} \int_0^\infty |x^3 - (a + bx + cx^2)|^2 e^{-x}$, a $\max \int_0^\infty x^3 g(x) e^{-x}$ kde g je kolmé na $\{1, x, x^2\}$ a $\int_0^\infty |g(x)|^2 e^{-x} = 1$.

4.4. Nechť $\varphi\colon H \to \mathbf{R}$ je funkcionál. Dokažte, že kodimenze prostoru $\{x;\ \varphi(x) = 0\}$ je nejvýše jedna.

4.5. Dokažte tvrzení: M je uzavřený podprostor H, právě když $(M^\perp)^\perp = M$.

4.6. Nechť $A \subset [0, 2\pi]$ je měřitelná. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \sin nx = \lim_{n\to\infty} \int_A \cos nx = 0.$$

4.7. Popište ortogonální projekce H na M, pokud

$$M = \{f \in L^2(0, 2\pi) : c_n(f) = 0 \text{ pro } n \in A \subset Z\},$$
$$M = \{f \in L^2(\mathbf{R}) : f = 0 \text{ s.v. pro } x \in B \subset \mathbf{R}\}$$

(A a B jsou dané množiny).

4.8. Ukažte, že na $\mathbf{C}[0, 1]$ nelze zavést skalární součin generující $\|.\|_\infty$.

4.9. Najděte prostor se skalárním součinem a v něm maximální ortonormální soustavu, jejíž lineární obal není hustý.

4.10. Nechť N je přirozené číslo, $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha^N = 1$ a $\alpha^2 \neq 1$. Dokažte, že skalární součin na Hilbertově prostoru splňuje identity

$$(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|x + \alpha^n y\|^2 \alpha^n$$

a

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|x + e^{it} y\|^2 e^{it}\, dt.$$

4.11. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak je ekvivalentní:

(i) $(x, y) = 0$,
(ii) $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ pro každý skalár α,
(iii) $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ pro každý skalár α.

4.12. Nechť X je množina všech reálných absolutně spojitých funkcí na $[0, 1]$, pro něž $f' \in L_2(0, 1)$. Rozhodněte, zda X je prostor se skalárním součinem, či zda je dokonce Hilbertův, pokud

$$(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'g'.$$

4.13. Určete ortogonální doplněk v $L_2(0, 1)$ k prostoru $\{f \in L_2 : \int_0^1 f = 0\}$.

4.14. Ukažte, že Legenderovy polynomy $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, tvoří ortogonální systém v $L^2(-1, 1)$.

4.15. Ukažte, že Čebyševovy polynomy $T_0(x) = 1$, $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ tvoří ortonormální bázi v L^2 s váhou $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Konečněrozměrné prostory

5.1. Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in \mathcal{L}(X, \mathbf{R})$, $\|f\| = 1$. Potom

$$\forall x \in X : \ |f(x) = \mathrm{dist}(x, \mathrm{Ker}\, f).$$

5.2. Nechť $Y = \{x \in c_0;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0\}$. Potom platí:

(i) Pak neexistuje $x \in S_{c_0}$ takový, že $\mathrm{dist}(x, Y) = 1$.
(ii) Pro každé $x \in c_0 \setminus Y$ neexistuje $y \in Y$ takové, že $\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, Y)$.

6. Hahn–Banachova věta

6.1. Ukažte, že $\|x\| = \sup\{f(x) : f \in X^*, \|f\| = 1\}$ pro $x \in X$, je-li X Banachův prostor.

6.2. (Banachova limita) Ukažte, že existuje spojitý lineární funkcionál L na prostoru ℓ^∞ takový, že

$L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ pro $x \in c$,
$L(x) \le L(y)$, je-li $x_n \le y_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a konečně
$L(x_1, x_2, \dots) = L(x_k, x_{k+1}, \dots)$ pro $x \in \ell^\infty$ a $k \in \mathbf{N}$.

(a) Užijte návod: Uvažujte funkcionál, který konvergentní posloupnosti přiřadí její limitu, a sublineární funkcionál $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.
(b) Užijte návod: Uvažujte funkcionál rovný nule na posloupnostech tvaru $(x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots)$ a sublineární funkcionál $p(x) = \sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$.
(c) Ukažte, že "Banachova limita" L nemůže splňovat rovnost $L(xy) = L(x)L(y)$.

6.3. Nechť X je normovaný lineární prostor.

(i) Nechť $Y \subset\subset X$ je konečněrozměrný. Pak Y má topologický doplněk.
(ii) Nechť $Y \subset\subset X$ je uzavřený a konečné kodimenze. Pak Y má topologický doplněk.

6.4. Nechť f je konkávní a g je konvexní na konvexní uzavřené množině $K \subset \mathbf{R}^n$, nechť $f(x) \le g(x)$ pro $x \in K$. Rozhodněte, zda existuje afinní funkce h na $\mathbf{R}$ taková, že $f(x) \le h(x) \le g(x)$ pro $x \in K$.

(Funkce h je afinní, jestliže $h(x) - h(0)$ je lineární. Ukažte, že h je afinní, právě když $h(ax + by) = ah(x) + bh(y)$ pro všechna $a, b \in \mathbf{R}$, $a + b = 1$, $x, y \in \mathbf{R}^n$.)

6.5. Nechť f je omezený funkcionál na podprostoru M Hilbertova prostoru H. Dokažte, že existuje právě jedno rozšíření f na celý H se stejnou normou. Ukaažte dále,že se toto rozšíření anuluje na $M^\perp$.

6.6. Sestrojte omezený funkcionál na podprostoru $L^1(\mu)$ tak, aby existovala dvě různá rozšíření na $L^1(\mu)$ zachovávající normu.

6.7. Funkcionál f na normovaném lineárním prostoru X je spojitý, právě když $\operatorname{Ker} f$ je uzavřený. Ukažte, že obdobná věta neplatí pro operátory.

6.8. Nechť M je podprostor normovaného prostoru X. Jestliže jediná spojitá lineární forma na X, která je nulová na M, je nulová, potom M je hustý v X.

6.9. Množina $H \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá nadrovina, pokud existují reálná čísla $a_1, \dots, a_n, c$ tak, že $H = \{x \in \mathbf{R}^n : \sum a_i x_i = c\}$. Nechť E je konvexní s neprázdným vnitřkem a y leží na hranici E.Dokažte, že existuje nadrovina H tak, že $y \in H$ a E leží na jedné straně H.

7. Duální prostory a reflexivita

7.1. Popis duálních prostorů.

(a) $(\mathbf{F}^n, \|\cdot\|_2)^* \cong (\mathbf{F}^n, \|\cdot\|_2)$,
(b) $(c_0)^* \cong l^1$,
(c) $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$,
(d) $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
(e) $(L^p[0,1])^* \cong L^q[0,1]$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
(f) $(\mathbf{C}(K))^* \cong \mathcal{M}(K)$.

7.2. (a) $\mathbf{F}^n$ je reflexivní,

(b) $L^p[0,1]$ prostory jsou reflexivní pro $1 < p < \infty$,
(c) c_0, ℓ^1, ℓ^∞, $L^1[0,1]$, $\mathbf{C}([0,1])$ není reflexivní.

7.3. Nalezněte $f \in X^*$ nenabývají normu na B_X pro $X = c_0, \ell_1, \ell_\infty, C([0,1])$.

8. Slabá konvergence

8.1. Platí:

(i) w i w^*–limita je jednoznačně určena,
(ii) jestliže $x_n \to x$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$,
(iii) jestliže $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$, pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

8.2. Platí:

(i) $\{e_n\} \subset H$ je ortonormální báze v Hilbertově prostoru H, pak $e_n \xrightarrow{w} 0$ a $\{e_n\}$ nekonverguje k 0.
(ii) $\{e_n\} \subset \ell^1$ „standardní báze“, pak $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ a $\{e_n\}$ nekonverguje slabě k 0.

8.3. Ukažte, že každá posloupnost v duálu k Banachovu prostoru X, která konverguje slabě, konverguje též w^*.

8.4. Platí:

(i) Je-li $\{x_n\} \subset X$, $x_n \xrightarrow{w} x$, pak $\{x_n\}$ je omezená.
(ii) Je-li X Banachův, $\{x_n^*\} \subset X^*$, $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, pak $\{x_n^*\}$ je omezená.

8.5. Ukažte, že slabá a w^*-konvergence v duálu k reflexivnímu prostoru splývají.

8.6. Najděte posloupnosti na jednotkové sféře, které konvergují slabě k nule, také v prostorech c_0, $\ell^\infty, \dots$

8.7. Ukažte, že konvergence posloupností v normě splývá se slabou konvergencí v $\mathbf{R}^n$ a ve všech konečně rozměrných Banachových prostorech.

8.8. Posloupnost $\{f_n\} \subset \mathbf{C}[0,1]$ konverguje slabě k $f \in \mathbf{C}[0,1]$, právě když $\{f_n\}$ je omezená a $f_n \to f$ bodově.

8.9. Nechť X je normovaný prostor, $\{x_n\}$ je kompaktní množina a $x_n \xrightarrow{w} x$, pak $x_n \to x$.

8.10. Nechť H je Hilbertův, $x_n \to x$ slabě a $\|x_n\| \to \|x\|$. Pak $x_n \to x$.

8.11. (Schurova věta) Dokažte, že každá slabě konvergentní posloupnost v ℓ^1 je konvergentní v normě.