Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 4 (3)

LS 2015-16, 15. 6. 2016

---

1. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$y_1' = y_1 + y_2 + t,$$
$$y_2' = -2y_1 + 4y_2 + 2t.$$

Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, která vyhovují počáteční podmínce $y(0) = (1, 0)^T$. (20 bodů)

2. Nechť množina $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je definována předpisem

$$\Omega = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2\big\}$$

a vektorové pole $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem

$$f(x, y, z) = \big[x^3 + y, y^3 + z, z^3 + x\big].$$

(a) Ukažte, že množina Ω je otevřená.
(b) Určete $H(\Omega)$ a pro bod $[1, 0, 0]$ explicitně zdůvodněte, proč $[1, 0, 0] \in H(\Omega)$.
(c) Určete $H_*(\Omega)$ a pro bod $[1, 0, 0]$ explicitně zdůvodněte, proč $[1, 0, 0] \in H_*(\Omega)$.
(d) Ukažte, že $\mathcal{H}^2\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$.
(e) Určete vektorové pole $\nu_\Omega(x)$ pro $\mathcal{H}^2$-s.v. body $H(\Omega)$.
(f) Ukažte, že $\mathcal{H}^2\big(H(\Omega)\big) < \infty$.
(g) Spočtěte $\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^2(y)$.

(25 bodů)

3. Nalezněte reálná čísla $b_n, n \in \mathbb{N}$, taková, aby platilo

$$e^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

pro každé $x \in (0, \pi)$. Svá tvrzení zdůvodněte. (15 bodů)

Řešení

1.
$$y_1(t) = 2\,e^{2\,t} - \frac{8}{9}\,e^{3\,t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}, \qquad y_2(t) = -\frac{16}{9}\,e^{3\,t} + 2\,e^{2\,t} - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}$$

3.
$$b_n = -2\frac{n e^{-\pi}\,(-1)^n - n}{(1+n^2)\,\pi}$$