Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 4 (2)

LS 2015-16, 8. 6. 2016

1. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$y_1' = y_1 + y_2 + t,$$
$$y_2' = -y_1 + 3y_2.$$

Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, která vyhovují počáteční podmínce $y(0) = (3, 0)^T$. (20 bodů)

2. Označme

$$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\},$$
$$\nu(x, y, z) = \left[\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y, \tfrac{1}{2}z\right], \quad [x, y, z] \in G,$$
$$\Omega = \{[x, y, z] \in G;\ x^2 + y^2 < 1, z > 0\}.$$

Nechť vektorové pole $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem $f(x, y, z) = [x^2, z^2, y]$.

(a) Ukažte, že množina G je 2-plocha orientovaná zobrazením ν.
(b) Ukažte, že Ω je relativně otevřená podmnožina G splňující $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subset G$.
(c) Určete $H_G(\Omega)$ a explicitně odvoďte, že $[1, 0, \sqrt{3}] \in H_G(\Omega)$.
(d) Určete $H_G(\Omega)_*$ a explicitně odvoďte, že $[1, 0, \sqrt{3}] \in H_G(\Omega)_*$.
(e) Ukažte, že $\mathcal{H}^1\big(H_G(\Omega) \setminus H_G(\Omega)_*\big) = 0$.
(f) Ukažte, že $\mathcal{H}^1\big(H_G(\Omega)\big) < \infty$.
(g) Spočtěte $\tau_{\Omega,\nu}(x, y, z)$ pro $(x, y, z) \in H_G(\Omega)_*$.
(h) Spočtěte $\int_\Omega \langle \operatorname{rot} f, \nu \rangle \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^2$.

(25 bodů)

3. Pro 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $[-\pi, \pi)$ definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi, 0), \\ 2x, & x \in [0, \pi), \end{cases}$$

nalezněte Fourierovu řadu. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ nalezněte součet této Fourierovy řady a rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně. Svá tvrzení zdůvodněte. (15 bodů)

Řešení

8 b **1.** Nejprve vyřešíme homogenní soustavu. Matice soustavy má tvar

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Úpravami λ-matice $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ obdržíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda - 3 \\ 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 \end{pmatrix}.$$

Polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 4$ má dvojnásobný kořen 2. Fundamentální systém rovnice $y_2'' - 4y_2' + 4y_2 = 0$ má tvar e^{2t}, te^{2t}. Obecné maximální řešení má pak tvar $y_2(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$. Z rovnice $y_1 + y_2' - 3y_2 = 0$ vypočteme

$$y_1(t) = (c_1 - c_2)e^{2t} + c_2te^{2t}.$$

8 b Řešení nehomogenní soustavy budeme hledat ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (\alpha(t) - \beta(t))e^{2t} + \beta(t)te^{2t}, \\ y_2(t) &= \alpha(t)e^{2t} + \beta(t)te^{2t}. \end{aligned}$$

Po dosazení do soustavy dostaneme podmínky

$$\begin{aligned} (\alpha'(t) - \beta(t))e^{2t} + \beta'(t)te^{2t} &= t, \\ \alpha'(t)e^{2t} + \beta'(t)te^{2t} &= 0 \end{aligned}$$

Odtud plyne $\alpha'(t) = t^2e^{-2t}, \beta'(t) = -te^{-2t}$. Nalezneme primitivní funkce a dostaneme

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= -\frac{1}{2}t^2e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}, \\ \beta(t) &= \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}.. \end{aligned}$$

Obecné maximální řešení naší soustavy má pak tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -\frac{3}{4}t - \frac{1}{2} + (c_1 - c_2)e^{2t} + c_2te^{2t} \\ y_2(t) &= -\frac{1}{4}t - \frac{1}{4} + c_1e^{2t} + c_2te^{2t}. \end{aligned}$$

4 b Koeficienty c_1, c_2 určíme na základě počáteční podmínky a dostaneme

$$y_1(t) = -\frac{3}{4}t - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}e^{2t} - \frac{13}{4}te^{2t}$$
$$y_2(t) = -\frac{1}{4}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{13}{4}te^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Pro Fourierovy koeficienty platí

$$a_0 = \frac{3}{2}\pi,$$
$$a_n = \frac{3((-1)^n - 1)}{\pi n^2},$$
$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Pro součet Fourierovy řady platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi,\pi) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{3}{2}\pi, & x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Fourierova řada nekonverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$, neboť limita částečných součtů není spojitá funkce.