Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 4 (1)

LS 2015-16, 1. 6. 2016

---

1. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 - 2y_2 + 5,\\
y_2' &= 4y_1 - 3y_2.
\end{aligned}
$$

Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, která vyhovují počáteční podmínce $y(0) = (1,0)^T$. (20 bodů)

2. Nechť množina $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je definována předpisem

$$\Omega = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 < 1, z \in (-1,1)\big\}$$

a vektorové pole $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem

$$f(x,y,z) = \big[x + z, 2xyz, -xz^2\big].$$

(a) Ukažte, že množina Ω je otevřená.
(b) Určete $H(\Omega)$ a pro bod $[1,0,0]$ explicitně zdůvodněte, proč $[1,0,0] \in H(\Omega)$.
(c) Ukažte, že $\mathcal{H}^2\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$.
(d) Určete vektorové pole $\nu_\Omega(x)$ pro $\mathcal{H}^2$-s.v. body $H(\Omega)$.
(e) Spočtěte $\mathcal{H}^2\big(H(\Omega)\big)$.
(f) Spočtěte $\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^2(y)$.

(25 bodů)

3. Pro 2π-periodickou funkci $f(x) = |\cos x|$, $x \in \mathbb{R}$, nalezněte Fourierovu řadu. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ nalezněte součet této Fourierovy řady a rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně. Svá tvrzení zdůvodněte. (15 bodů)

Výsledky

1. $y_1(t) = 3 - 2e^{-t}\cos(2t) + 2e^{-t}\sin(2t),\, y_2(t) = 4 - 4e^{-t}\cos(2t), \quad t \in \mathbb{R}$

2. (f) 2π

3. $a_0 = \frac{4}{\pi},\ a_1 = 0,\ a_n = \frac{-4\cos(\frac{\pi}{2}n)}{n^2-1}, n \in \mathbb{N}, n > 1;\, b_n = 0,\ n \in \mathbb{N}$