

METRICKÉ PROSTORY III

1. Uvažujme prostor spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ s následující metrikou

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Ukažte, že tento metrický prostor není úplný.

2. Necht' (P, ρ) je metrický prostor takový, že pro každou posloupnost neprázdných uzavřených množin $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ splňující

(a) $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$,

platí, že $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$. Dokažte, že (P, ρ) je úplný.

3. Nalezněte metrický prostor (P, ρ) a posloupnost neprázdných uzavřených množin $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ takovou, že $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$.

4. Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Ukažte, že množina

$$\{f \in \mathcal{C}([a, b]); \exists x \in (a, b): f'(x) \in \mathbf{R}\}$$

je 1. kategorie v prostoru $\mathcal{C}([a, b])$.

5. Ukažte, že prostor ℓ_2 je separabilní a jeho jednotková koule není totálně omezená.
6. Ukažte, že metrický prostor (P, ρ) je totálně omezený právě tehdy, když z každé posloupnosti prvků P lze vybrat cauchyovskou podposloupnost.
7. Je sjednocení dvou souvislých množin souvislá množina?
8. Je průnik dvou souvislých množin souvislá množina?
9. Je vzor souvislé množiny při spojitěm zobrazení souvislá množina?
10. Je množina $\{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ souvislá?
11. Necht' P je souvislý metrický prostor, který obsahuje více než jeden bod. Dokažte, že P je nespočetný.
12. Ukažte, že každý normovaný lineární prostor je souvislý.