Matematická analýza 4

LS 2015-16

Miroslav Zelený

18. Metrické prostory III
19. Křivkový a plošný integrál
20. Absolutně spoj. fce a fce s konečnou variací
21. Fourierovy řady

18. Metrické prostory III

18.1 Úplné metrické prostory – pokračování

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z X. Řekneme, že $\{x_n\}$ je **cauchyovská**, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n, m \in \mathbf{N}, n, m \geq n_0 : \; \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

18.1 Úplné metrické prostory – pokračování

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z X. Řekneme, že $\{x_n\}$ je **cauchyovská**, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n, m \in \mathbf{N}, n, m \geq n_0 : \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definice

Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků z X je konvergentní v (X, ρ).

Věta 18.1

Nechť (X, ρ) *je úplný metrický prostor a* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin* X *splňující*

(a) $\forall n \in \mathbf{N}: \; F_{n+1} \subset F_n$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$.

Potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *je jednobodová množina.*

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$. Řekneme, že M je v prostoru (X, ρ)

- **hustá**, jestliže $\overline{M} = X$,

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$. Řekneme, že M je v prostoru (X, ρ)

- **hustá**, jestliže $\overline{M} = X$,
- **řídká**, jestliže $X \setminus \overline{M}$ je hustá,

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$. Řekneme, že M je v prostoru (X, ρ)

- **hustá**, jestliže $\overline{M} = X$,
- **řídká**, jestliže $X \setminus \overline{M}$ je hustá,
- **1. kategorie**, jestliže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde M_n jsou řídké v (X, ρ),

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$. Řekneme, že M je v prostoru (X, ρ)

- **hustá**, jestliže $\overline{M} = X$,
- **řídká**, jestliže $X \setminus \overline{M}$ je hustá,
- **1. kategorie**, jestliže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde M_n jsou řídké v (X, ρ),
- **2. kategorie**, jestliže M není 1. kategorie,

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$. Řekneme, že M je v prostoru (X, ρ)

- **hustá**, jestliže $\overline{M} = X$,
- **řídká**, jestliže $X \setminus \overline{M}$ je hustá,
- **1. kategorie**, jestliže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde M_n jsou řídké v (X, ρ),
- **2. kategorie**, jestliže M není 1. kategorie,
- **residuální**, jestliže $X \setminus M$ je 1. kategorie.

Věta 18.2 (Baire)

Nechť (X, ρ) *je úplný metrický prostor a* $G \subset X$ *je otevřená a neprázdná. Pak* G *je 2. kategorie v* (X, ρ)*.*

Definice

(i) Nechť X je množina a $f\colon X \to X$. Řekneme, že $x \in X$ je **pevným bodem** zobrazení f, jestliže $f(x) = x$.

Definice

(i) Nechť X je množina a $f\colon X \to X$. Řekneme, že $x \in X$ je **pevným bodem** zobrazení f, jestliže $f(x) = x$.

(ii) Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $f\colon X \to X$ je **kontrakce**, jestliže existuje $q \in [0, 1)$ takové, že platí

$$\forall x, y \in X\colon\ \rho\big(f(x), f(y)\big) \leq q\rho(x, y).$$

Věta 18.3 (Banachova věta o kontrakci)

Nechť (X, ρ) *je úplný neprázdný metrický prostor a* $f\colon X \to X$ *je kontrakce. Pak* f *má právě jeden pevný bod.*

Věta 17.8 (Picard)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f}\colon [t, \boldsymbol{x}] \mapsto \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^n$ je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v $\boldsymbol{x}$, tj. pro každý bod $[t, \boldsymbol{x}] \in G$ existuje $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, a $L \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé dva body $[s, \boldsymbol{x}^1]$, $[s, \boldsymbol{x}^2]$ z $B([t, \boldsymbol{x}], \varepsilon)$ máme

$$||\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^1) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^2)|| \leq L||\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2||.$$

Jestliže $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice

$$\boldsymbol{x}' = f(t, \boldsymbol{x}) \qquad (\star)$$

splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{ds}$

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{ds}$
- $T\colon M \to M$

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$
- $T\colon M \to M$
- T je kontrakce

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$
- $T\colon M \to M$
- T je kontrakce
- aplikace Banachovy věty

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$
- $T\colon M \to M$
- T je kontrakce
- aplikace Banachovy věty
- lokální jednoznačnost řešení

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$
- $T\colon M \to M$
- T je kontrakce
- aplikace Banachovy věty
- lokální jednoznačnost řešení
- existence maximálního řešení

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$
- $T\colon M \to M$
- T je kontrakce
- aplikace Banachovy věty
- lokální jednoznačnost řešení
- existence maximálního řešení
- jednoznačnost maximálního řešení

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$ $\checkmark$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$
- $T\colon M \to M$
- T je kontrakce
- aplikace Banachovy věty
- lokální jednoznačnost řešení
- existence maximálního řešení
- jednoznačnost maximálního řešení

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$ $\checkmark$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$ $\checkmark$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$
- $T\colon M \to M$
- T je kontrakce
- aplikace Banachovy věty
- lokální jednoznačnost řešení
- existence maximálního řešení
- jednoznačnost maximálního řešení

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$ $\checkmark$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$ $\checkmark$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{ds}$ $\checkmark$
- $T\colon M \to M$
- T je kontrakce
- aplikace Banachovy věty
- lokální jednoznačnost řešení
- existence maximálního řešení
- jednoznačnost maximálního řešení

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$ $\checkmark$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$ $\checkmark$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{ds}$ $\checkmark$
- $T\colon M \to M$ $\checkmark$
- T je kontrakce
- aplikace Banachovy věty
- lokální jednoznačnost řešení
- existence maximálního řešení
- jednoznačnost maximálního řešení

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$ $\checkmark$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$ $\checkmark$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$ $\checkmark$
- $T \colon M \to M$ $\checkmark$
- T je kontrakce $\checkmark$
- aplikace Banachovy věty
- lokální jednoznačnost řešení
- existence maximálního řešení
- jednoznačnost maximálního řešení

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$ $\checkmark$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$ $\checkmark$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$ $\checkmark$
- $T\colon M \to M$ $\checkmark$
- T je kontrakce $\checkmark$
- aplikace Banachovy věty $\checkmark$
- lokální jednoznačnost řešení
- existence maximálního řešení
- jednoznačnost maximálního řešení

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$ $\checkmark$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$ $\checkmark$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$ $\checkmark$
- $T\colon M \to M$ $\checkmark$
- T je kontrakce $\checkmark$
- aplikace Banachovy věty $\checkmark$
- lokální jednoznačnost řešení $\checkmark$
- existence maximálního řešení
- jednoznačnost maximálního řešení

Zornovo lemma. Nechť A je množina uspořádaná relací $\preceq$ tak, že každý řetězec je shora omezený. Potom ke každému $a \in A$ existuje maximální prvek $b \in A$ takový, že $a \preceq b$.

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$ ✓
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$ ✓
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$ ✓
- $T\colon M \to M$ ✓
- T je kontrakce ✓
- aplikace Banachovy věty ✓
- lokální jednoznačnost řešení ✓
- existence maximálního řešení ✓
- jednoznačnost maximálního řešení

Zornovo lemma. Nechť A je množina uspořádaná relací $\preceq$ tak, že každý řetězec je shora omezený. Potom ke každému $a \in A$ existuje maximální prvek $b \in A$ takový, že $a \preceq b$.

K důkazu Picardovy věty

- definice $X = \mathscr{C}(I, \mathbf{R}^n)$ $\checkmark$
- definice $M = \overline{B}(g^0, \frac{1}{2}\varepsilon)$ $\checkmark$
- definice $T(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$ $\checkmark$
- $T\colon M \to M$ $\checkmark$
- T je kontrakce $\checkmark$
- aplikace Banachovy věty $\checkmark$
- lokální jednoznačnost řešení $\checkmark$
- existence maximálního řešení $\checkmark$
- jednoznačnost maximálního řešení $\checkmark$

18.2 Separabilní metrické prostory

Definice

Metrický prostor se nazývá **separabilní**, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

18.2 Separabilní metrické prostory

Definice

Metrický prostor se nazývá **separabilní**, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\mathscr{B}$ je systém otevřených podmnožin (X, ρ). Řekneme, že $\mathscr{B}$ je **báze otevřených množin**, jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset X$ existuje $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{B}$ takové, že $\bigcup \mathscr{B}^* = G$.

Věta 18.4 (charakterizace seprabilních prostorů)

Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Potom je ekvivalentní:

(i) *Prostor (X, ρ) je separabilní.*

(ii) *Existuje spočetná báze otevřených množin v prostoru (X, ρ).*

(iii) *Pro každý systém $\mathscr{G}$ otevřených množin, který pokrývá X, existuje spočetný systém otevřených množin $\mathscr{G}^* \subset \mathscr{G}$, který pokrývá X.*

Věta 18.4 (charakterizace seprabilních prostorů)

Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Potom je ekvivalentní:

(i) *Prostor (X, ρ) je separabilní.*

(ii) *Existuje spočetná báze otevřených množin v prostoru (X, ρ).*

(iii) *Pro každý systém $\mathscr{G}$ otevřených množin, který pokrývá X, existuje spočetný systém otevřených množin $\mathscr{G}^* \subset \mathscr{G}$, který pokrývá X.*

Důsledek 18.5 (dědičnost separability)

Podprostor separabilního metrického prostoru je separabilní.

18.3 Totálně omezené prostory

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Řekneme, že $M \subset X$ je **ε-síť v** X, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje bod $y \in M$ takový, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

18.3 Totálně omezené prostory

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Řekneme, že $M \subset X$ je **ε-síť v** X, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje bod $y \in M$ takový, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Definice

Metrický prostor (X, ρ) se nazývá **totálně omezený**, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, existuje konečná ε-síť. Množina $Y \subset X$ se nazývá **totálně omezená**, jestliže podprostor (Y, ρ) je totálně omezený.

Věta 18.6 (vlastnosti totálně omezených prostorů)

Nechť (X, ρ) *je totálně omezený metrický prostor. Pak platí:*

(a) *prostor* (X, ρ) *je omezený,*

Věta 18.6 (vlastnosti totálně omezených prostorů)

Nechť (X, ρ) *je totálně omezený metrický prostor. Pak platí:*

(a) *prostor* (X, ρ) *je omezený,*

(b) *prostor* (X, ρ) *je separabilní,*

Věta 18.6 (vlastnosti totálně omezených prostorů)

Nechť (X, ρ) *je totálně omezený metrický prostor. Pak platí:*

(a) *prostor* (X, ρ) *je omezený,*

(b) *prostor* (X, ρ) *je separabilní,*

(c) *každá množina* $Y \subset X$ *je totálně omezená.*

Věta 18.7 (charakterizace kompaktních prostorů)

Metrický prostor (X, ρ) *je kompaktní, právě když je úplný a totálně omezený.*

Věta 18.7 (charakterizace kompaktních prostorů)

Metrický prostor (X, ρ) *je kompaktní, právě když je úplný a totálně omezený.*

Důsledek 18.8

Kompaktní metrický prostor je separabilní.

18.4 Souvislé prostory

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset X$ je **obojetná**, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená v (X, ρ).

18.4 Souvislé prostory

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset X$ je **obojetná**, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená v (X, ρ).

Definice

Metrický prostor se nazývá **souvislý**, není-li sjednocením dvou disjunktních neprázdných otevřených množin.
Podmnožina M metrického prostoru (X, ρ) se nazývá **souvislá**, jestliže (M, ρ) je souvislý.

Lemma 18.9

Nechť (X, ρ) *je metrický prostor,* $M \subset X$ *a* $A, B \subset M$ *jsou disjunktní neprázdné otevřené množiny v* (M, ρ) *takové, že* $M = A \cup B$. *Potom existují* G *a* H *disjunktní otevřené množiny v* (X, ρ) *takové, že* $A = M \cap G$ *a* $B = M \cap H$.

Věta 18.10

Množina $E \subset \mathbf{R}$ je souvislá, právě když E je interval.

Věta 18.10

Množina $E \subset \mathbf{R}$ je souvislá, právě když E je interval.

Věta 18.11

Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Potom platí:

(a) *Je-li $Y \subset X$ souvislá a $Y \subset M \subset \overline{Y}$, pak M je souvislá.*

Věta 18.10

Množina $E \subset \mathbf{R}$ *je souvislá, právě když* E *je interval.*

Věta 18.11

Nechť (X, ρ) *je metrický prostor. Potom platí:*

(a) *Je-li* $Y \subset X$ *souvislá a* $Y \subset M \subset \overline{Y}$*, pak* M *je souvislá.*

(b) *Nechť* I *je neprázdná množina a* Y_α*,* $\alpha \in I$*, jsou souvislé podmnožiny* X *splňující* $\bigcap_{\alpha \in I} Y_\alpha \neq \emptyset$*. Potom* $\bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha$ *je souvislá.*

Věta 18.12

Nechť (X, ρ) *je souvislý metrický prostor,* (Y, σ) *je metrický prostor a* $f\colon X \to Y$ *je spojité. Pak* $f(X)$ *je souvislá.*

Definice

Řekneme, že metrický prostor (P, ρ) je **křivkově souvislý**, jestliže pro každé $x, y \in P$ existuje spojité zobrazení $f\colon [0, 1] \to P$ takové, že $f(0) = x$ a $f(1) = y$. Řekneme, že množina $M \subset P$ je **křivkově souvislá**, jestliže prostor (M, ρ) je křivkově souvislý.

Definice

Řekneme, že metrický prostor (P, ρ) je **křivkově souvislý**, jestliže pro každé $x, y \in P$ existuje spojité zobrazení $f\colon [0, 1] \to P$ takové, že $f(0) = x$ a $f(1) = y$.
Řekneme, že množina $M \subset P$ je **křivkově souvislá**, jestliže prostor (M, ρ) je křivkově souvislý.

Věta 18.13 (vztah souvislosti a křivkové souvislosti)

Nechť (P, ρ) je křivkově souvislý metrický protor. Potom je P souvislý.

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $M \subset P$ je **komponenta** (P, ρ), jestliže M je maximální souvislá množina. **Komponentou** množiny $A \subset P$, rozumíme komponentu prostoru (A, ρ).

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $M \subset P$ je **komponenta** (P, ρ), jestliže M je maximální souvislá množina. **Komponentou** množiny $A \subset P$, rozumíme komponentu prostoru (A, ρ).

Věta 18.14

Nechť (P, ρ) je neprázdný metrický prostor a $\mathscr{S}$ je množina všech komponent P. Potom $\mathscr{S}$ obsahuje pouze neprázdné uzavřené množiny, je disjunktní a $\bigcup \mathscr{S} = P$.

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $M \subset P$ je **komponenta** (P, ρ), jestliže M je maximální souvislá množina. **Komponentou** množiny $A \subset P$, rozumíme komponentu prostoru (A, ρ).

Věta 18.14

Nechť (P, ρ) je neprázdný metrický prostor a $\mathscr{S}$ je množina všech komponent P. Potom $\mathscr{S}$ obsahuje pouze neprázdné uzavřené množiny, je disjunktní a $\bigcup \mathscr{S} = P$.

Věta 18.15

Nechť X je normovaný lineární prostor a $G \subset X$ je otevřená. Potom komponenty G jsou otevřené v X.

19. Křivkový a plošný integrál

19.1 Hausdorffovy míry

Označení

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Pro $\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, položme

$$\mathscr{H}^k(A, \delta) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} A_j)^k;\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,\ \operatorname{diam} A_j \leq \delta \right\},$$

kde normalizační člen $\alpha_k \in (0, \infty)$ bude určen později,

19.1 Hausdorffovy míry

Označení

Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Pro $\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, položme

$$\mathscr{H}^k(A, \delta) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} A_j)^k;\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,\ \operatorname{diam} A_j \leq \delta\Big\},$$

kde normalizační člen $\alpha_k \in (0, \infty)$ bude určen později,

$$\mathscr{H}^k(A) = \sup_{\delta>0} \mathscr{H}^k(A, \delta).$$

Věta 19.1

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$. Potom je $\mathscr{H}^k$ vnější míra na $\mathbf{R}^n$.

Věta 19.1

Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$. Potom je $\mathscr{H}^k$ vnější míra na $\mathbf{R}^n$.

Definice

Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$. Množinovou funkci

$$A \mapsto \mathscr{H}^k(A), \quad A \subset \mathbf{R}^n,$$

nazýváme k**-dimenzionální vnější Hausdorffova míra** na $\mathbf{R}^n$.

Definice (TMI, Definice 11.3)

Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že vnější míra γ na P je **metrická**, jestliže pro každé dvě množiny $A, B \subset P$ splňující

$$\inf\{\rho(x, y);\ x \in A, y \in B\} > 0$$

platí $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) + \gamma(B)$.

Definice (TMI, Definice 11.3)

Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že vnější míra γ na P je **metrická**, jestliže pro každé dvě množiny $A, B \subset P$ splňující

$$\inf\{\rho(x, y);\ x \in A, y \in B\} > 0$$

platí $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) + \gamma(B)$.

Věta 19.2

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$. Potom je vnější míra $\mathscr{H}^k$ na $\mathbf{R}^n$ metrická a translačně invariantní.

Věta (TMI, Věta 11.2)

Nechť γ je metrická vnější míra na metrickém prostoru (P, ρ). Potom je každá borelovská podmnožina P γ-měřitelná.

Věta (TMI, Věta 11.2)

Nechť γ je metrická vnější míra na metrickém prostoru (P, ρ). Potom je každá borelovská podmnožina P γ-měřitelná.

Důsledek 19.3

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, a $A \subset \mathbf{R}^n$ je borelovská množina. Potom je A $\mathscr{H}^k$-měřitelná.

Věta (TMI, Věta 11.2)

Nechť γ je metrická vnější míra na metrickém prostoru (P, ρ). Potom je každá borelovská podmnožina P γ-měřitelná.

Důsledek 19.3

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, a $A \subset \mathbf{R}^n$ je borelovská množina. Potom je A $\mathscr{H}^k$-měřitelná.

Lemma 19.4

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$. Potom $0 < \mathscr{H}^k([0,1)^k \times \{0\}^{n-k}) < \infty$.

Věta (TMI, Věta 11.2)

Nechť γ je metrická vnější míra na metrickém prostoru (P, ρ). Potom je každá borelovská podmnožina P γ-měřitelná.

Důsledek 19.3

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, a $A \subset \mathbf{R}^n$ je borelovská množina. Potom je A $\mathscr{H}^k$-měřitelná.

Lemma 19.4

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$. Potom $0 < \mathscr{H}^k([0,1)^k \times \{0\}^{n-k}) < \infty$.

Označení

Koeficient α_k zvolíme tak, aby $\mathscr{H}^k([0,1)^k \times \{0\}^{n-k}) = 1$.

Věta 19.5 (regularita Hausdorffovy míry)

Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, a $A \subset \mathbf{R}^n$. Potom existuje borelovská množina $B \subset \mathbf{R}^n$ taková, že $A \subset B$ a $\mathscr{H}^k(A) = \mathscr{H}^k(B)$.

Věta 19.5 (regularita Hausdorffovy míry)

Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, a $A \subset \mathbf{R}^n$. Potom existuje borelovská množina $B \subset \mathbf{R}^n$ taková, že $A \subset B$ a $\mathscr{H}^k(A) = \mathscr{H}^k(B)$.

Věta 19.6

Nechť $n \in \mathbf{N}$ a $A \subset \mathbf{R}^n$. Potom $\mathscr{H}^n(A) = \lambda^{n*}(A)$.

Věta 19.7 (vlastnosti Hausdorffovy míry)

(a) *Nechť* $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $Q\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ *je izometrie a* $E \subset \mathbf{R}^k$. *Potom* $\mathscr{H}^k(Q(E)) = \lambda^{k*}(E)$.

Věta 19.7 (vlastnosti Hausdorffovy míry)

(a) *Nechť* $k, n \in \mathbf{N}, k \le n$, $Q\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ *je izometrie a* $E \subset \mathbf{R}^k$. *Potom* $\mathscr{H}^k(Q(E)) = \lambda^{k*}(E)$.

(b) *Nechť* $k, n, m \in \mathbf{N}$, $k \le n, k \le m$, *a* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *je* β*-lipschitzovské,* $E \subset \mathbf{R}^n$. *Potom*

$$\mathscr{H}^k(f(E)) \le \beta^k \mathscr{H}^k(E).$$

Věta 19.7 (vlastnosti Hausdorffovy míry)

(a) *Nechť* $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $Q \colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ *je izometrie a* $E \subset \mathbf{R}^k$. *Potom* $\mathscr{H}^k(Q(E)) = \lambda^{k*}(E)$.

(b) *Nechť* $k, n, m \in \mathbf{N}$, $k \leq n, k \leq m$, *a* $f \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *je* β*-lipschitzovské,* $E \subset \mathbf{R}^n$. *Potom*

$$\mathscr{H}^k(f(E)) \leq \beta^k \mathscr{H}^k(E).$$

(c) *Nechť* $k_1, k_2, n \in \mathbf{N}$, $k_1 < k_2 \leq n$, $A \subset \mathbf{R}^n$. *Jestliže* $\mathscr{H}^{k_1}(A) < \infty$, *pak* $\mathscr{H}^{k_2}(A) = 0$.

Lemma 19.8

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, *a* $L\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ *je prosté lineární zobrazení. Potom pro každou* λ^k*-měřitelnou množinu* $A \subset \mathbf{R}^k$ *platí*

$$\mathscr{H}^k(L(A)) = \sqrt{\det L^T L} \cdot \lambda^k(A).$$

Lemma 19.8

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, *a* $L\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ *je prosté lineární zobrazení. Potom pro každou* λ^k*-měřitelnou množinu* $A \subset \mathbf{R}^k$ *platí*

$$\mathscr{H}^k(L(A)) = \sqrt{\det L^T L} \cdot \lambda^k(A).$$

Označení

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, a $L\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ je lineární zobrazení. Budeme značit $\operatorname{vol} L = \sqrt{\det L^T L}$.

Lemma 19.8

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, *a* $L\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ *je prosté lineární zobrazení. Potom pro každou* λ^k*-měřitelnou množinu* $A \subset \mathbf{R}^k$ *platí*

$$\mathscr{H}^k(L(A)) = \sqrt{\det L^T L} \cdot \lambda^k(A).$$

Označení

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, a $L\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ je lineární zobrazení. Budeme značit $\operatorname{vol} L = \sqrt{\det L^T L}$.

Definice

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$. Řekneme, že φ je **regulární** na G, jestliže je třídy $\mathscr{C}^1$ na G a $\varphi'(x)$ je prosté pro každé $x \in G$.

Lemma 19.9

Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, *$G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina,* $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ *je prosté regulární zobrazení,* $x \in G$ *a* $\beta > 1$*. Potom existuje okolí* V *bodu* x *takové, že*

(a) *zobrazení* $y \mapsto \varphi\big(\varphi'(x)^{-1}(y)\big)$ *je* β*-lipschitzovské na* $\varphi'(x)(V)$*,*

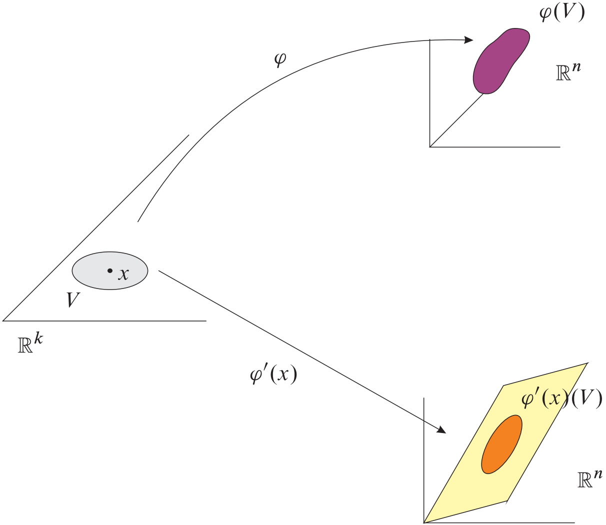
Lemma 19.9

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ *je otevřená množina,* $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ *je prosté regulární zobrazení,* $x \in G$ *a* $\beta > 1$*. Potom existuje okolí* V *bodu* x *takové, že*

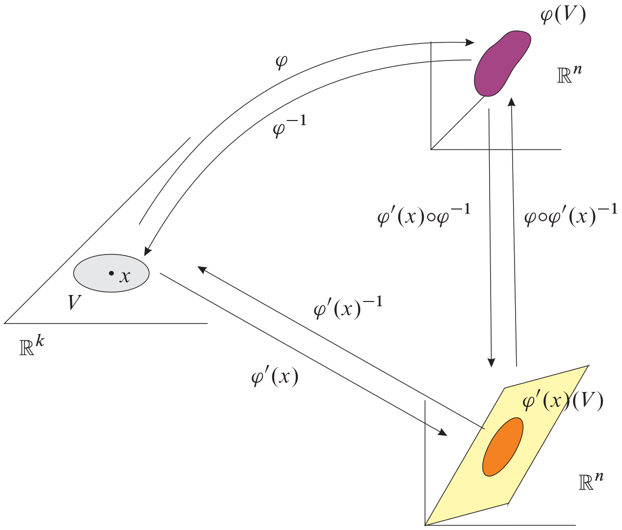
(a) *zobrazení* $y \mapsto \varphi\bigl(\varphi'(x)^{-1}(y)\bigr)$ *je* β*-lipschitzovské na* $\varphi'(x)(V)$*,*

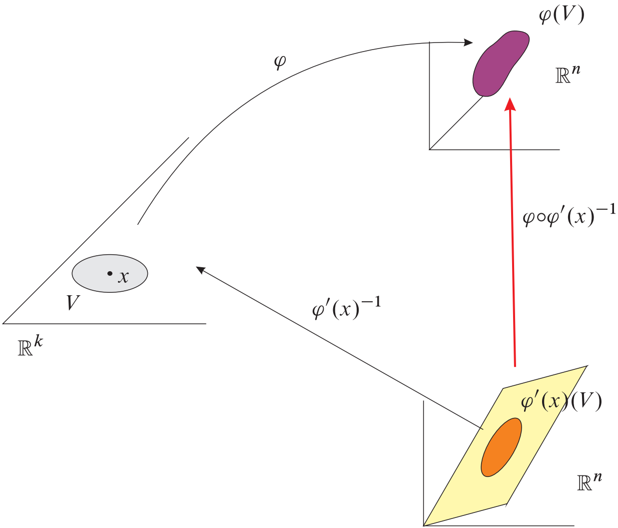
(b) *zobrazení* $z \mapsto \varphi'(x)\bigl(\varphi^{-1}(z)\bigr)$ *je* β*-lipschitzovské na* $\varphi(V)$*.*

。

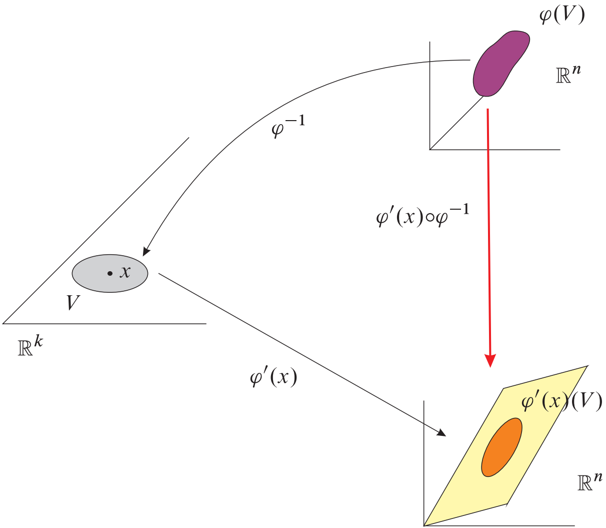

$\varphi(V)$
φ
$\mathbb{R}^n$
x
V
$\mathbb{R}^k$
$\varphi'(x)$
$\varphi'(x)(V)$
$\mathbb{R}^n$

。


$\varphi(V)$
φ
$\mathbb{R}^n$
φ^{-1}
$\varphi'(x)\circ\varphi^{-1}$
$\varphi\circ\varphi'(x)^{-1}$
x
V
$\varphi'(x)^{-1}$
$\mathbb{R}^k$
$\varphi'(x)$
$\varphi'(x)(V)$
$\mathbb{R}^n$



$\varphi(V)$
φ
$\mathbb{R}^n$
$\varphi\circ\varphi'(x)^{-1}$
x
V
$\varphi'(x)^{-1}$
$\mathbb{R}^k$
$\varphi'(x)(V)$
$\mathbb{R}^n$


$\varphi(V)$
$\mathbb{R}^n$
φ^{-1}
$\varphi'(x)\circ\varphi^{-1}$
x
V
$\mathbb{R}^k$
$\varphi'(x)$
$\varphi'(x)(V)$
$\mathbb{R}^n$

Lemma 19.10

Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, *$G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\alpha > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že pro každou λ^k-měřitelnou $E \subset V$ platí*

$$\alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\, \lambda^k(t) \leq \mathscr{H}^k(\varphi(E)) \leq \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\, \lambda^k(t).$$

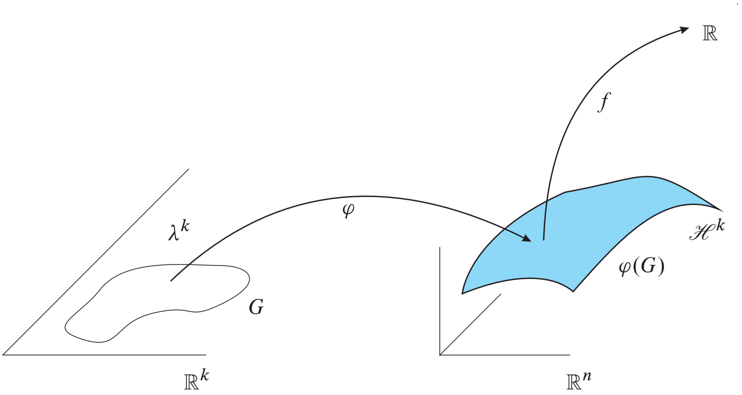
Věta 19.11 (area formule)

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je prosté regulární zobrazení a $f\colon \varphi(G) \to \mathbf{R}$ je $\mathscr{H}^k$-měřitelná. Potom platí

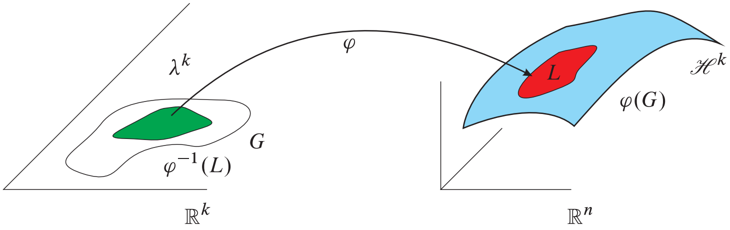
$$\int_{\varphi(G)} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t))\,\mathrm{vol}\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,\lambda^k(t),$$

pokud integrál na pravé straně konverguje.

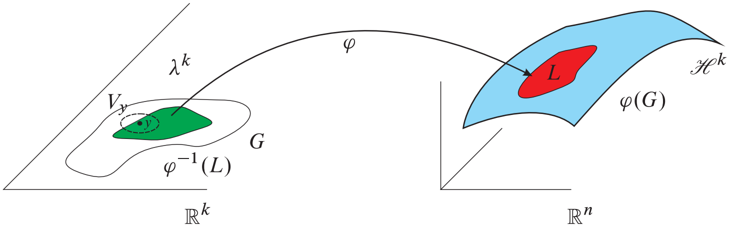
Area formule



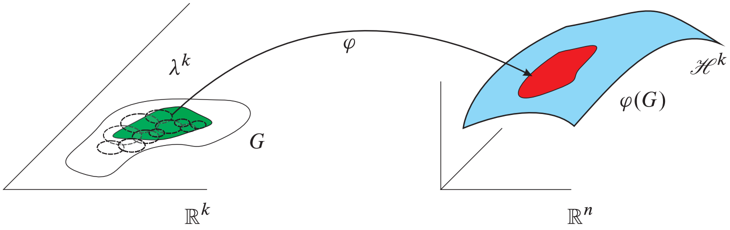
Area formule



Area formule



Area formule



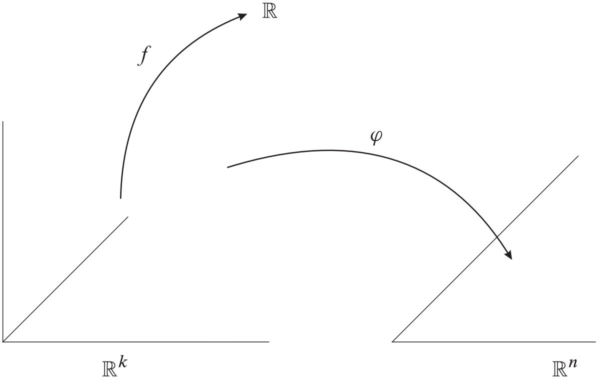
Věta 19.12 (coarea formule)

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k > n$, $\varphi\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ je lipschitzovské zobrazení, $f\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ je λ^k-integrovatelná funkce. Potom platí

$$\int_{\mathbf{R}^k} f(x)\sqrt{\det(\varphi'(x)\varphi'(x)^T)}\,\mathrm{d}\,\lambda^k(x) = \int_{\mathbf{R}^n}\Big(\int_{\varphi^{-1}(\{y\})} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^{k-n}(x)\Big)\,\mathrm{d}\,\lambda^n(y).$$

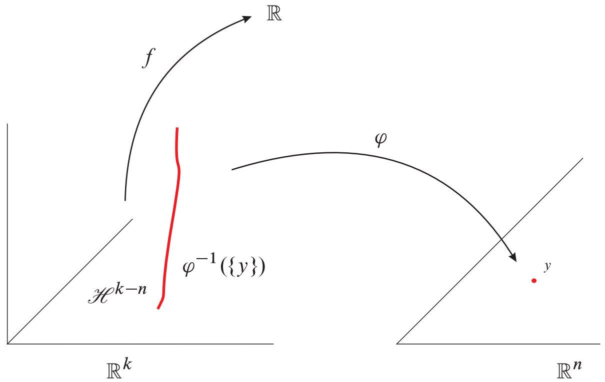
Coarea formule

$$\int_{\mathbf{R}^k} f(x)\sqrt{\det(\varphi'(x)\varphi'(x)^T)}\,\mathrm{d}\,\lambda^k(x) = \int_{\mathbf{R}^n}\Big(\int_{\varphi^{-1}(\{y\})} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^{k-n}(x)\Big)\,\mathrm{d}\,\lambda^n(y).$$



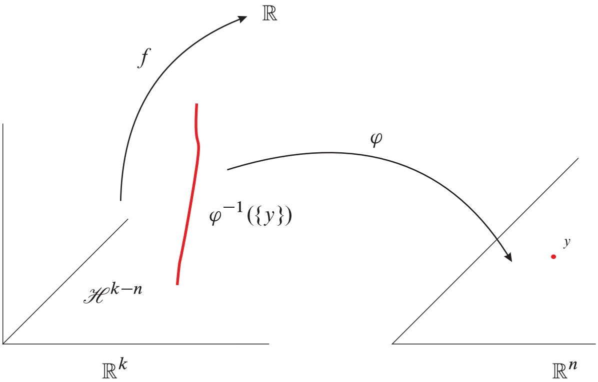
Coarea formule

$$\int_{\mathbf{R}^k} f(x)\sqrt{\det(\varphi'(x)\varphi'(x)^T)}\,\mathrm{d}\,\lambda^k(x) = \int_{\mathbf{R}^n}\Big(\int_{\varphi^{-1}(\{y\})} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^{k-n}(x)\Big)\,\mathrm{d}\,\lambda^n(y).$$



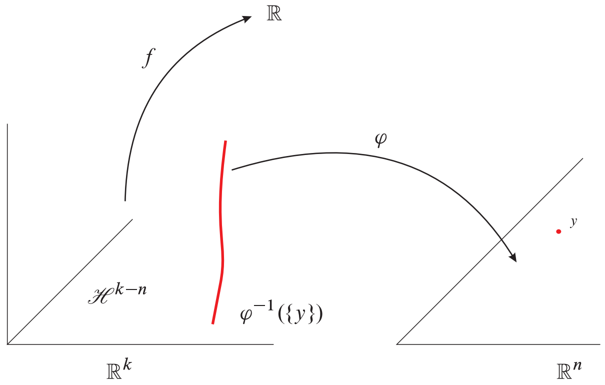
Coarea formule

$$\int_{\mathbf{R}^k} f(x)\sqrt{\det(\varphi'(x)\varphi'(x)^T)}\,\mathrm{d}\,\lambda^k(x) = \int_{\mathbf{R}^n}\Big(\int_{\varphi^{-1}(\{y\})} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^{k-n}(x)\Big)\,\mathrm{d}\,\lambda^n(y).$$



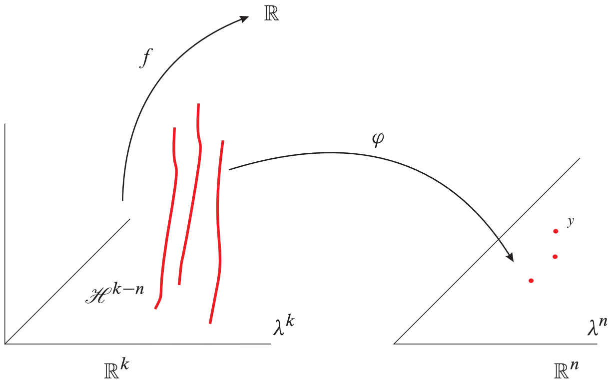
Coarea formule

$$\int_{\mathbf{R}^k} f(x)\sqrt{\det(\varphi'(x)\varphi'(x)^T)}\,\mathrm{d}\,\lambda^k(x) = \int_{\mathbf{R}^n}\Big(\int_{\varphi^{-1}(\{y\})} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^{k-n}(x)\Big)\,\mathrm{d}\,\lambda^n(y).$$



Coarea formule

$$\int_{\mathbf{R}^k} f(x)\sqrt{\det(\varphi'(x)\varphi'(x)^T)}\,\mathrm{d}\,\lambda^k(x) = \int_{\mathbf{R}^n}\Big(\int_{\varphi^{-1}(\{y\})} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^{k-n}(x)\Big)\,\mathrm{d}\,\lambda^n(y).$$



Důsledek 19.13

Nechť $f\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ je λ^k-integrovatelná funkce. Potom platí

$$\int_{\mathbf{R}^k} f(x)\,\mathrm{d}\,\lambda^k(x) = \int_0^\infty \left(\int_{\{x\in\mathbf{R}^k;\ \|x\|=r\}} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^{k-1}(x) \right) \mathrm{d}\,\lambda^1(r).$$

19.2 Křivky, plochy a jejich orientace

Definice

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leq n$. Řekneme, že neprázdná množina $M \subset \mathbf{R}^n$ je **k-dimenzionální plocha** (krátce **k-plocha**), jestliže pro každé $x \in M$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbf{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ takový, že $x \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M.

Definice

Nechť $k, n \in \mathbf{R}^n, k \leq n$, M je k-plocha a $x \in M$. Pak vektor $v \in \mathbf{R}^n$ nazveme **tečným vektorem** k ploše M v bodě x, jestliže $v = 0$ nebo existuje otevřený interval I, regulární zobrazení $c\colon I \to M$ a $t_0 \in I$ takové, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$.

Definice

Nechť $k, n \in \mathbf{R}^n, k \leq n$, M je k-plocha a $x \in M$. Pak vektor $v \in \mathbf{R}^n$ nazveme **tečným vektorem** k ploše M v bodě x, jestliže $v = 0$ nebo existuje otevřený interval I, regulární zobrazení $c\colon I \to M$ a $t_0 \in I$ takové, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Množinu všech tečných vektorů k ploše M v bodě x nazýváme **tečným prostorem** k ploše M v bodě x a značíme $T_x(M)$.

Věta 19.14

Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $M \subset \mathbf{R}^n$ *je* k*-plocha a* $x \in M$. *Potom platí:*

(a) $T_x(M)$ *je* k*-dimenzionální vektorový prostor,*

Věta 19.14

Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $M \subset \mathbf{R}^n$ *je* k*-plocha a* $x \in M$.
Potom platí:

(a) $T_x(M)$ *je* k*-dimenzionální vektorový prostor,*

(b) *je-li* $G \subset \mathbf{R}^k$ *otevřená množina,* $a \in G$ *a* $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ *je regulární homeomorfismus takový, že* $x = \varphi(a) \in \varphi(G) \subset M$ *a* $\varphi(G)$ *je otevřená v* M*, potom* $\varphi'(a)(\mathbf{R}^k) = T_x(M)$.

Věta 19.14

Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $M \subset \mathbf{R}^n$ je k-plocha a $x \in M$. Potom platí:

(a) *$T_x(M)$ je k-dimenzionální vektorový prostor,*

(b) *je-li $G \subset \mathbf{R}^k$ otevřená množina, $a \in G$ a $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je regulární homeomorfismus takový, že $x = \varphi(a) \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M, potom $\varphi'(a)(\mathbf{R}^k) = T_x(M)$.*

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je $(n-1)$-plocha a $x \in M$. Řekneme, že $v \in \mathbf{R}^n$ je **normálový vektor** k ploše M v bodě x, jestliže $v \in T_x(M)^\perp$.

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Pak definujeme **vektorový součin** vektorů $u^1, \dots, u^{n-1}$ předpisem

$$u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = \left(\det([e^i, u^1, \dots, u^{n-1}])\right)_{i=1}^{n} \in \mathbf{R}^n.$$

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $u^1, \ldots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Pak definujeme **vektorový součin** vektorů $u^1, \ldots, u^{n-1}$ předpisem

$$u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = \left(\det([e^i, u^1, \ldots, u^{n-1}])\right)_{i=1}^{n} \in \mathbf{R}^n.$$

Věta 19.15 (vlastnosti vektorového součinu)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, a $u^1, \ldots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$.

(a) *Pro každé $v \in \mathbf{R}^n$ platí*

$$\langle v, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = \det[v, u^1, \ldots, u^{n-1}].$$

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Pak definujeme **vektorový součin** vektorů $u^1, \dots, u^{n-1}$ předpisem

$$u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = \left(\det([e^i, u^1, \dots, u^{n-1}])\right)_{i=1}^{n} \in \mathbf{R}^n.$$

Věta 19.15 (vlastnosti vektorového součinu)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, a $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$.

(a) *Pro každé $v \in \mathbf{R}^n$ platí*
$$\langle v, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = \det[v, u^1, \dots, u^{n-1}].$$

(b) *Vektory $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou lineárně závislé, právě když $u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = 0$.*

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Pak definujeme **vektorový součin** vektorů $u^1, \dots, u^{n-1}$ předpisem

$$u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = \left(\det([e^i, u^1, \dots, u^{n-1}])\right)_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n.$$

Věta 19.15 (vlastnosti vektorového součinu)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, a $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$.

(a) *Pro každé $v \in \mathbf{R}^n$ platí*
$$\langle v, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = \det[v, u^1, \dots, u^{n-1}].$$

(b) *Vektory $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou lineárně závislé, právě když $u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = 0$.*

(c) *Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\langle u^i, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = 0$.*

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Pak definujeme **vektorový součin** vektorů $u^1, \dots, u^{n-1}$ předpisem

$$u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = \left(\det([e^i, u^1, \dots, u^{n-1}])\right)_{i=1}^{n} \in \mathbf{R}^n.$$

Věta 19.15 (vlastnosti vektorového součinu)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, *a* $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$.

(a) *Pro každé* $v \in \mathbf{R}^n$ *platí*

$$\langle v, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = \det[v, u^1, \dots, u^{n-1}].$$

(b) *Vektory* $u^1, \dots, u^{n-1}$ *jsou lineárně závislé, právě když* $u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = 0$.

(c) *Pro každé* $i \in \{1, \dots, n\}$ *platí* $\langle u^i, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = 0$.

(d) *Platí* $\|u^1 \times \cdots \times u^{n-1}\| = \operatorname{vol}[u^1, \dots, u^{n-1}]$.

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, a $M \subset \mathbf{R}^n$ je $(n-1)$-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\nu \colon M \to \mathbf{R}^n$ takové, že $\nu(x) \in T_x(M)^\perp$ a $\|\nu(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$.

Lemma 19.16

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *je otevřená a* $z \in H(\Omega)$.

(R) *Nechť existuje okolí* U *bodu* z *a* ***rozhraničující*** *funkce* $h\colon U \to \mathbf{R}$ *taková, že* $h \in \mathscr{C}^1(U)$, $\nabla h(z) \neq 0$ *a* $U \cap \Omega = \{x \in U;\ h(x) < 0\}$.

Potom existuje okolí $V \subset U$ *bodu* z *takové, že* $V \cap H(\Omega)$ *je* $(n-1)$*-plocha. Vektor* $\nu_\Omega(z) = \frac{\nabla h(z)}{\|\nabla h(z)\|}$ *je jednotkový normálový vektor v bodě* z *k* $V \cap H(\Omega)$ *a nezávisí na volbě rozhraničující funkce* h.

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$. Řekneme, že bod z je **regulárním bodem** hranice Ω, pokud je splněna podmínka (R) z Lemmatu 19.16 pro Ω a z. Vektor $\nu_\Omega(z)$ nazýváme **vnějším jednotkovým normálovým vektorem** k Ω v bodě z. Množinu všech regulárních bodů hranice Ω značíme $H_*(\Omega)$.

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$. Řekneme, že bod z je **regulárním bodem** hranice Ω, pokud je splněna podmínka (R) z Lemmatu 19.16 pro Ω a z. Vektor $\nu_\Omega(z)$ nazýváme **vnějším jednotkovým normálovým vektorem** k Ω v bodě z. Množinu všech regulárních bodů hranice Ω značíme $H_*(\Omega)$.

Věta 19.17

Nechť $n \in \mathbf{N}, n > 1, \Omega \subset \mathbf{R}^n$, je neprázdná omezená otevřená množina. Pokud $H_*(\Omega) \neq \emptyset$, pak $H_*(\Omega)$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν_Ω.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je 1-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\tau\colon M \to \mathbf{R}^n$ takové, že $\tau(x) \in T_x(M)$ a $\|\tau(x)\| = 1$.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

(a) Řekneme, že zobrazení $c\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je **(parametrická) křivka**, jestliže je spojité.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

(a) Řekneme, že zobrazení $c\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ je **(parametrická) křivka**, jestliže je spojité.

(b) Řekneme, že parametrická křivka $c\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ je **skoro regulární**, pokud existuje dělení $\{t_i\}_{i=0}^{p}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

- c je třídy $\mathscr{C}^1$ na $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, p$,
- $\forall t \in [a,b] \setminus \{t_0, \ldots, t_p\}\colon c'(t) \neq 0$.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

(a) Řekneme, že zobrazení $c\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ je **(parametrická) křivka**, jestliže je spojité.

(b) Řekneme, že parametrická křivka $c\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ je **skoro regulární**, pokud existuje dělení $\{t_i\}_{i=0}^{p}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

- c je třídy $\mathscr{C}^1$ na $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, p$,
- $\forall t \in [a,b] \setminus \{t_0, \dots, t_p\}\colon c'(t) \neq 0$.

(c) Řekneme, že křivka $c\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ je **jednoduchá a uzavřená**, jestliže $c|_{[a,b)}$ je prosté a $c(a) = c(b)$.

Věta 19.18 (Jordan)

Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbf{R}^2$ *je jednoduchá uzavřená křivka. Pak existují disjunktní otevřené souvislé množiny* $\operatorname{Int} c$ *a* $\operatorname{Ext} c$ *takové, že* $\operatorname{Int} c$ *je omezená a* $\operatorname{Ext} c$ *je neomezená a platí* $\mathbf{R}^2 = \operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c \cup c([a,b])$*.*

Věta 19.18 (Jordan)

Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbf{R}^2$ *je jednoduchá uzavřená křivka. Pak existují disjunktní otevřené souvislé množiny* $\operatorname{Int} c$ *a* $\operatorname{Ext} c$ *takové, že* $\operatorname{Int} c$ *je omezená a* $\operatorname{Ext} c$ *je neomezená a platí* $\mathbf{R}^2 = \operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c \cup c([a,b])$. *Navíc platí* $H(\operatorname{Int} c) = H(\operatorname{Ext} c) = c([a,b])$.

Věta 19.18 (Jordan)

Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbf{R}^2$ *je jednoduchá uzavřená křivka. Pak existují disjunktní otevřené souvislé množiny* $\operatorname{Int} c$ *a* $\operatorname{Ext} c$ *takové, že* $\operatorname{Int} c$ *je omezená a* $\operatorname{Ext} c$ *je neomezená a platí* $\mathbf{R}^2 = \operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c \cup c([a,b])$. *Navíc platí* $H(\operatorname{Int} c) = H(\operatorname{Ext} c) = c([a,b])$.

Věta 19.19

Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbf{R}^2$ *je skoro regulární jednoduchá uzavřená křivka. Potom všechny body množiny* $H(\operatorname{Int} c)$ *až na konečně mnoho jsou regulárními body* $H(\operatorname{Int} c)$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν a $f\colon M \to \mathbf{R}^n$. **Tok vektorového pole f** orientovanou plochou (M, ν) definujeme jako

$$\int_M \langle f(y), \nu(y) \rangle \, \mathrm{d}\,\mathscr{H}^{n-1}(y),$$

pokud integrál konverguje.

19.3 Gaussova, Greenova a Stokesova věta

Definice

Nechť $U \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathscr{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **divergenci vektorového pole** f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

Věta 19.20 (Gaussova věta o divergenci)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathscr{H}^{n-1}\big(H(\Omega)\big) < \infty$, $\mathscr{H}^{n-1}\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$ a f je vektorové pole z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$, které je třídy $\mathscr{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Pak platí

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y) \big\rangle \, \mathrm{d}\, \mathscr{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, \mathrm{d}\, \lambda^n(x).$$

Lemma 19.21 (rozklad jednotky)

Nechť $n \in \mathbf{N}$ *a* $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. *Pak existují funkce* $\omega_j\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j \in \mathbf{N}$, *takové, že pro každé* $j \in \mathbf{N}$ *platí*

(a) ω_j *je nezáporná,*

(b) ω_j *je třídy* $\mathscr{C}^1(\mathbf{R}^n)$,

(c) $\operatorname{diam} \operatorname{spt} \omega_j < \varepsilon$,

a pro každé $x \in \mathbf{R}^n$

(d) $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(x) = 1$,

(e) *existuje okolí* $U \subset \mathbf{R}^n$ *bodu* x *takové, že množina* $\{j \in \mathbf{N};\ \operatorname{spt} \omega_j \cap U \neq \emptyset\}$ *je konečná.*

Lemma 19.22

Nechť V je reálný unitární prostor dimenze $n \in \mathbf{N}$, $v \in V$ a $v \neq 0$. Potom existují vektory $u^1, \ldots, u^n \in V$, které tvoří ortonormální bázi V a pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $\langle v, u^i \rangle > 0$.

Lemma 19.23

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *je otevřená množina,* $z \in H(\Omega)$ *je regulární bod hranice* Ω*,* $i \in \{1, \dots, n\}$ *a* $\nu_\Omega(z)_i > 0$*. Potom existuje otevřená množina* $W \subset \mathbf{R}^{n-1}$ *obsahující bod* $z^* = [z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n]$*, otevřená množina* $H \subset \mathbf{R}$ *obsahující bod* z_i *a funkce* $\varphi \colon W \to H$ *taková, že* $\varphi \in \mathscr{C}^1(W)$ *a*

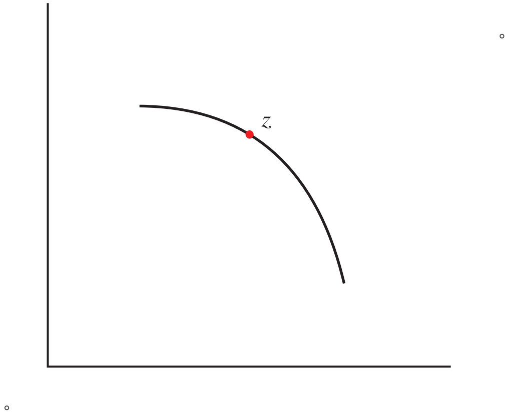
$$\begin{aligned}\{x \in \mathbf{R}^n;\ [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n] \in W, x_i \in H, \\ x_i < \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \\ = \{x \in \Omega;\ [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n] \in W, x_i \in H\}.\end{aligned}$$

K důkazu Lemmatu 19.23

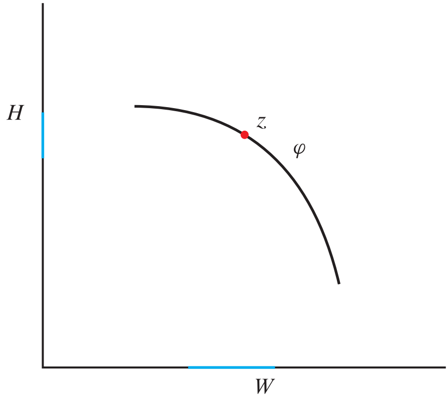
$h\colon U \to \mathbf{R}$

- $U \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $z \in U$,
- $h \in \mathscr{C}^1(U)$, $\frac{\partial h}{\partial x_n}(z) > 0$
- $\{x \in U;\ h(x) < 0\} = U \cap \Omega$

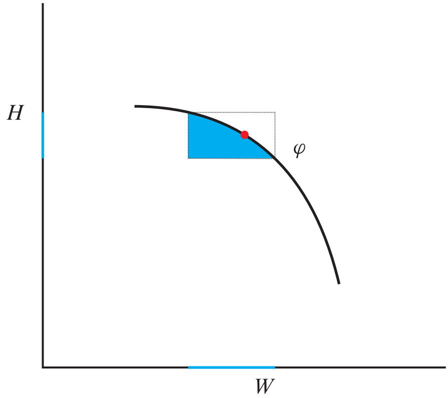
K důkazu Lemmatu 19.23



K důkazu Lemmatu 19.23



K důkazu Lemmatu 19.23



Lemma 19.24

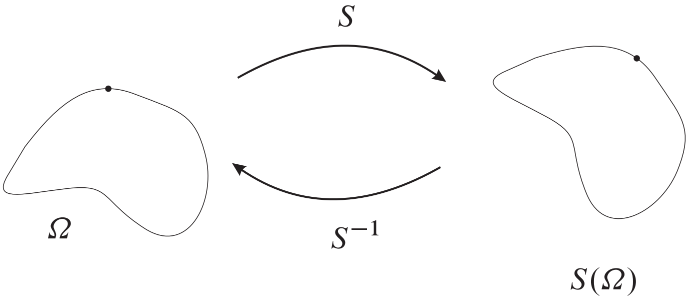
Nechť Ω a f jsou jako ve Větě 19.20 a $S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ je lineární izometrie. Potom pro každý regulární bod z hranice Ω je bod $S(z)$ regulárním bodem hranice $S(\Omega)$ a platí $\nu_{S(\Omega)}(S(z)) = S\nu_{\Omega}(z)$. Dále platí

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x)\,\mathrm{d}\,\lambda^n(x) = \int_{S(\Omega)} \operatorname{div}(S \circ f \circ S^{-1})(\tilde{x})\,\mathrm{d}\,\lambda^n(\tilde{x}),$$

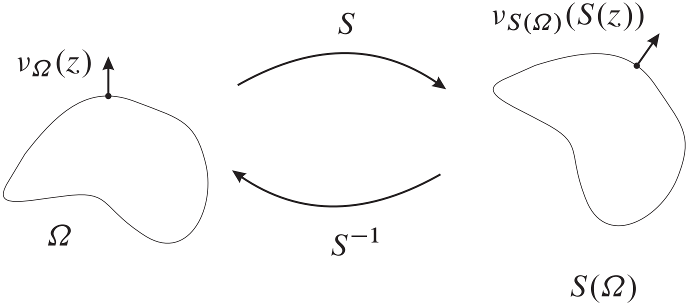
$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_{\Omega}(y) \rangle\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^{n-1}(y)$$

$$= \int_{H(S(\Omega))} \langle S \circ f \circ S^{-1}(\tilde{y}), \nu_{S(\Omega)}(\tilde{y}) \rangle\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^{n-1}(\tilde{y}).$$

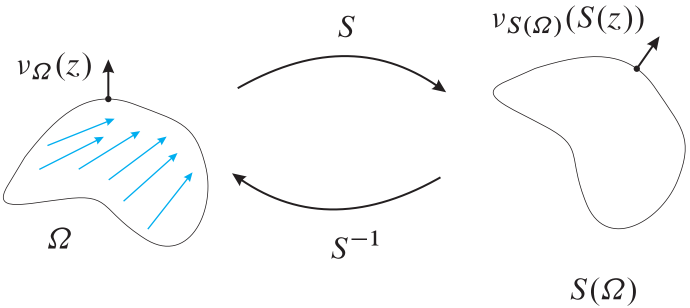
K Lemmatu 19.24



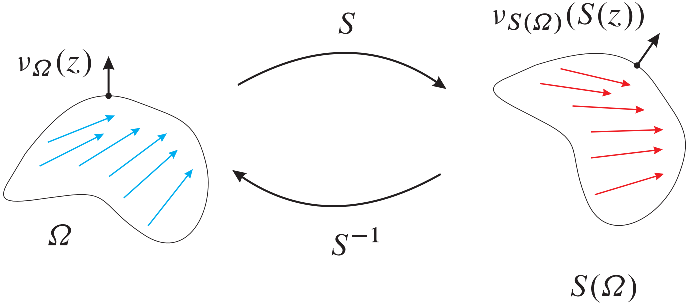
K Lemmatu 19.24



K Lemmatu 19.24



K Lemmatu 19.24

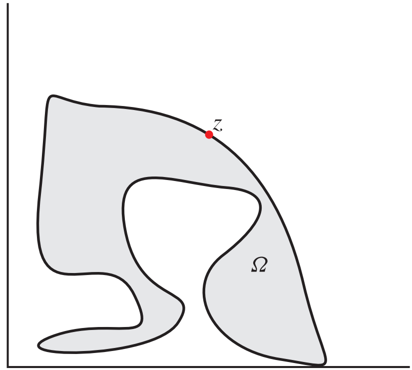


Lemma 19.25

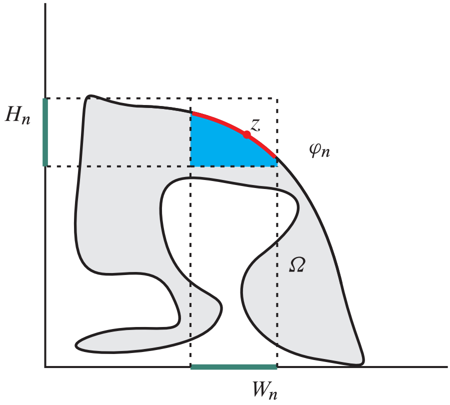
Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená omezená množina a $z \in H_*(\Omega) \cup \Omega$. Potom existuje otevřená množina $U \subset \mathbf{R}^n$ obsahující z taková, že pro každé vektorové pole f z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$, které je třídy $\mathscr{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$ a $\operatorname{spt} f \subset U$, *platí*

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y) \rangle \, \mathrm{d}\,\mathscr{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, \mathrm{d}\,\lambda^n(x).$$

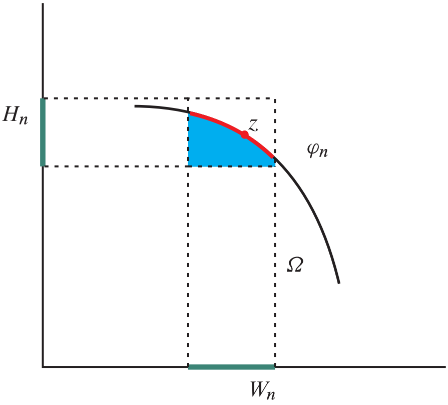
K důkazu Lemmatu 19.25



K důkazu Lemmatu 19.25



K důkazu Lemmatu 19.25



K důkazu Lemmatu 19.25

Dokazujeme

$$\int_{H(\Omega)} f_n(y)\nu_\Omega(y)_n \,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\,\mathrm{d}\,\lambda^n(x).$$

K důkazu Lemmatu 19.25

Dokazujeme

$$\int_{H(\Omega)} f_n(y)\nu_\Omega(y)_n \,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\,\mathrm{d}\,\lambda^n(x).$$

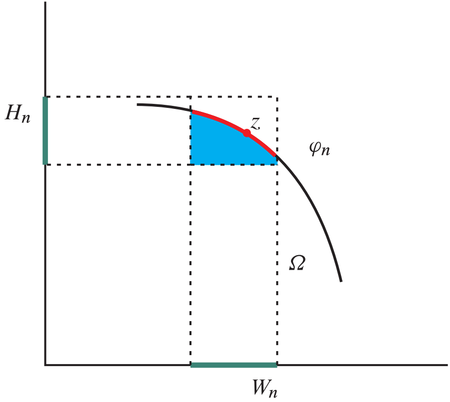
Výpočet pravé strany

$$\int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\,\mathrm{d}\,\lambda^n(x) = \int_{W_n} f_n(w,\varphi_n(w))\,\mathrm{d}\,\lambda^{n-1}(w).$$

K důkazu Lemmatu 19.25

Výpočet levé strany

$\psi\colon\ W_n \to \mathbf{R}^n, \psi(w) = [w, \varphi_n(w)]$



Lemma 19.26

Nechť Ω a f jsou jako ve Větě 19.20 a $\operatorname{spt} f \cap (H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = \emptyset$. *Potom*

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y) \rangle \, d\mathscr{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x).$$

Lemma 19.27

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $N \subset \mathbf{R}^n$ *je kompaktní a* $\mathscr{H}^{n-1}(N) = 0$. *Potom existují* $\mathscr{C}^1$ *funkce* $v_m \colon \mathbf{R}^n \to [0,1]$, $m \in \mathbf{N}$, *takové, že platí:*

(a) $v_m \to \chi_{\mathbf{R}^n \setminus N}$,

(b) $\int \|\nabla v_m(x)\| \, \mathrm{d}\,\lambda^n(x) \to 0$,

(c) *pro každé* $m \in \mathbf{N}$ *existuje otevřená množina* $G_m \subset \mathbf{R}^n$ *obsahující* N *taková, že* $v_m|_{G_m} = 0$.

Maxwellovy rovnice

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\operatorname{rot} E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\
\operatorname{div} B &= 0 \\
c^2 \operatorname{rot} B &= \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{j}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

E = elektrické pole, B = magnetické pole, c = rychlost světla, ...

Definice

(a) Nechť $U \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbf{R}^2$ je zobrazení třídy $\mathscr{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x).$$

Definice

(a) Nechť $U \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbf{R}^2$ je zobrazení třídy $\mathscr{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x).$$

(b) Nechť $U \subset \mathbf{R}^3$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbf{R}^3$ je zobrazení třídy $\mathscr{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \left[\tfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(x), \tfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), \tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\right].$$

Věta 19.28 (Green)

Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathscr{H}^1\big(H(\Omega)\big) < \infty$, $\mathscr{H}^1\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$ a f je vektorové pole z $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}^2$, které je třídy $\mathscr{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Nechť $\tau_\Omega \colon H_*(\Omega) \to \mathbf{R}^2$ je tečné vektorové pole k $H_*(\Omega)$ definované předpisem $\tau_\Omega(y) = - \times \nu_\Omega(y)$. Pak platí

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \tau_\Omega(y) \big\rangle \,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{rot} f(x) \,\mathrm{d}\,\lambda^2(x).$$

Definice

Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ je skoro regulární křivka.

(a) Nechť g je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$. **Křivkový integrál prvního druhu** $\int_c g \, \mathrm{d}\, s$ definujeme jako

$$\int_a^b g(c(t)) \cdot \|c'(t)\| \, \mathrm{d}\, t,$$

pokud tento integrál konverguje.

(b) Nechť f je vektorové pole z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$. **Křivkový integrál druhého druhu** $\int_c f \cdot \mathrm{d}\, c$ definujeme jako

$$\int_a^b \langle f(c(t)), c'(t) \rangle \, \mathrm{d}\, t,$$

pokud tento integrál konverguje.

Věta 19.29

Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbf{R}^2$ *je skoro regulární jednoduchá uzavřená křivka a* f *je vektorové pole z* $\mathbf{R}^2$ *do* $\mathbf{R}^2$*, které je třídy* $\mathscr{C}^1$ *na otevřené množině obsahující* $\overline{\operatorname{Int} c}$*. Jestliže existuje* $t \in [a,b]$ *takové, že* $\det[\nu_\Omega(c(t)), c'(t)] > 0$*, pak platí*

$$\int_c f \cdot \mathrm{d}\, c = \int_{\operatorname{Int} c} \operatorname{rot} f(x) \,\mathrm{d}\, \lambda^2(x).$$

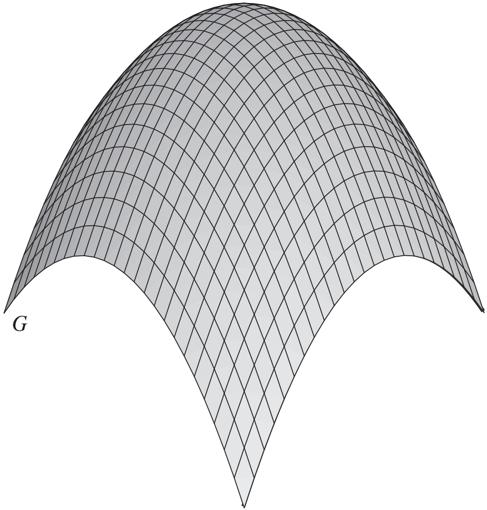
Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^3$ je 2-plocha orientovaná normálovým polem ν, $\Omega \subset G$ je relativně otevřená v G a $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subset G$. Řekneme, že $z \in H_G(\Omega)$ je **regulárním** bodem hranice Ω vzhledem ke G, jestliže existuje okolí U bodu z a funkce $h\colon U \to \mathbf{R}$ třídy $\mathscr{C}^1$ taková, že $\nu(z) \times \nabla h(z) \neq 0$ a $\{x \in G \cap U;\ h(x) < 0\} = \Omega \cap U$.

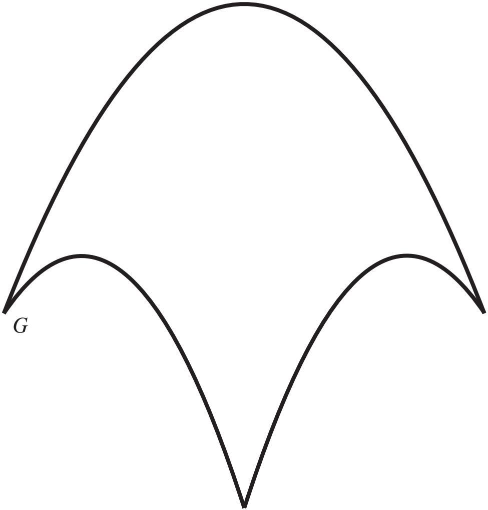
Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^3$ je 2-plocha orientovaná normálovým polem ν, $\Omega \subset G$ je relativně otevřená v G a $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subset G$. Řekneme, že $z \in H_G(\Omega)$ je **regulárním** bodem hranice Ω vzhledem ke G, jestliže existuje okolí U bodu z a funkce $h\colon U \to \mathbf{R}$ třídy $\mathscr{C}^1$ taková, že $\nu(z) \times \nabla h(z) \neq 0$ a $\{x \in G \cap U;\ h(x) < 0\} = \Omega \cap U$. V takovém bodě definujeme

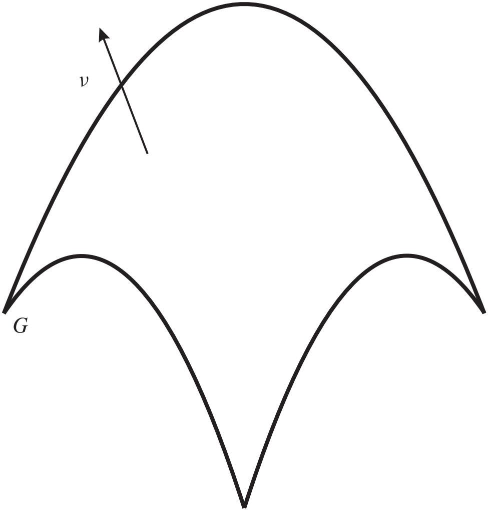
$$\tau_{\Omega,\nu}(z) = \frac{\nu(z) \times \nabla h(z)}{\|\nu(z) \times \nabla h(z)\|}.$$



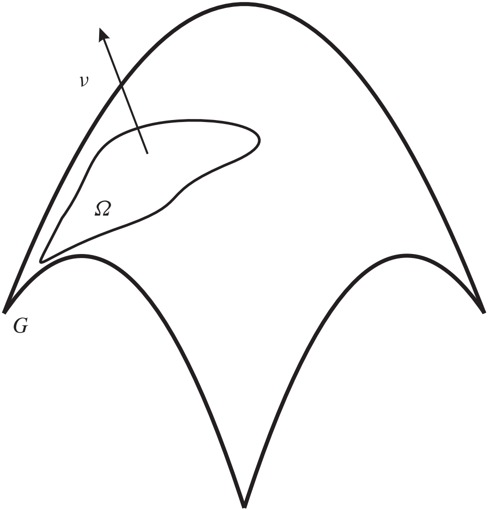
G



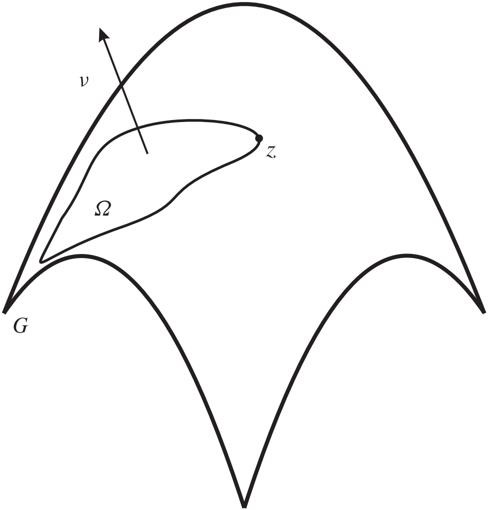
G



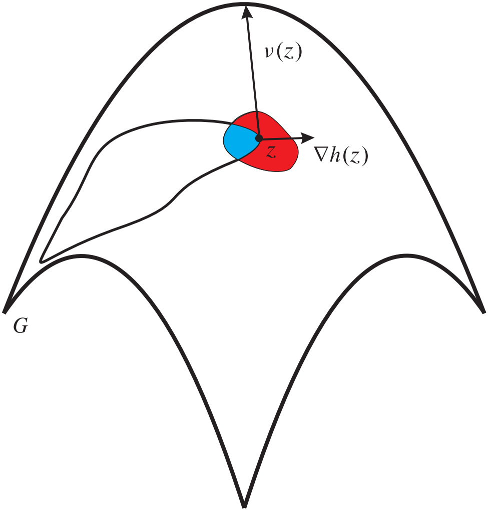
ν
G

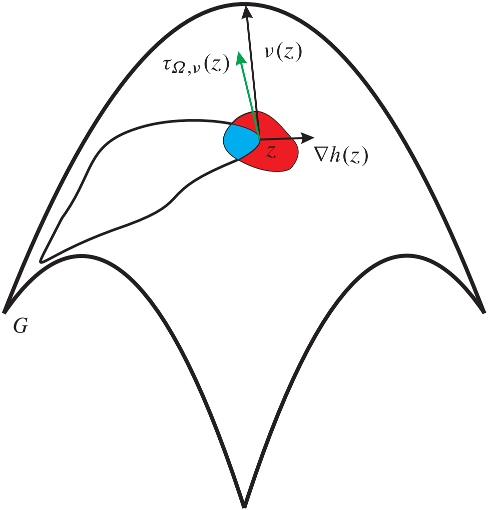


ν
Ω
G



ν
z
Ω
G


$\nu(z)$
z
$\nabla h(z)$
G



$\nu(z)$
$\tau_{\Omega,\nu}(z)$
z
$\nabla h(z)$
G

Věta 19.30

Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Označme $H_G(\Omega)_*$ množinu všech regulárních bodů hranice Ω vzhledem ke G. Potom je $H_G(\Omega)_*$ 1-plocha a $\tau_{\Omega,\nu}$ je orientace $H_G(\Omega)_*$.

Věta 19.30

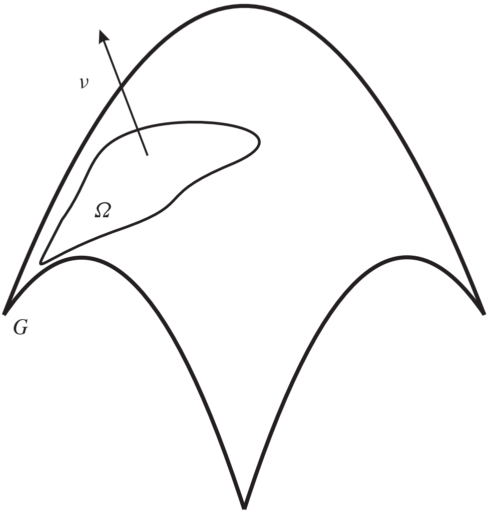
Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Označme $H_G(\Omega)_*$ množinu všech regulárních bodů hranice Ω vzhledem ke G. Potom je $H_G(\Omega)_*$ 1-plocha a $\tau_{\Omega,\nu}$ je orientace $H_G(\Omega)_*$.

Věta 19.31 (Stokes)

Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Předpokládejme dále, že Ω je omezená, $\mathscr{H}^1(H_G(\Omega)) < \infty$ a $\mathscr{H}^1(H_G(\Omega) \setminus H_G(\Omega)_*) = 0$. Nechť vektorové pole f z $\mathbf{R}^3$ do $\mathbf{R}^3$ je třídy $\mathscr{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Potom

$$\int_{H_G(\Omega)} \langle f(y), \tau_{\Omega,\nu}(y) \rangle \, \mathrm{d}\,\mathscr{H}^1(y) = \int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} f(x), \nu(x) \rangle \, \mathrm{d}\,\mathscr{H}^2(x).$$

$$\int_{H_G(\Omega)} \langle f(y), \tau_{\Omega,\nu}(y)\rangle \, \mathrm{d}\,\mathscr{H}^1(y) = \int_\Omega \langle \operatorname{rot} f(x), \nu(x)\rangle \, \mathrm{d}\,\mathscr{H}^2(x).$$



Věta 19.32 (věta o potenciálu)

Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *je otevřená množina. Nechť* $c\colon [a,b] \to \Omega$ *je skoro regulární křivka a* $u\colon \Omega \to \mathbf{R}$ *je funkce třídy* $\mathscr{C}^1$*. Potom*

$$u\big(c(b)\big) - u\big(c(a)\big) = \int_c \nabla u \cdot \mathrm{d}\, c.$$

Definice

Řekneme, že množina $U \subset \mathbf{R}^n$ je **hvězdicovitá**, jestliže existuje $a \in U$ takový, že pro každé $x \in U$ platí $\{a + t(x - a);\ t \in [0, 1]\} \subset U$.

Definice
Řekneme, že množina $U \subset \mathbf{R}^n$ je **hvězdicovitá**, jestliže existuje $a \in U$ takový, že pro každé $x \in U$ platí $\{a + t(x - a);\ t \in [0, 1]\} \subset U$.

Definice
Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je množina, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ je vektorové pole a $u\colon \Omega \to \mathbf{R}$. Řekneme, že u je **potenciál** pole f na Ω, jestliže pro každé $x \in \Omega$ platí $\nabla u(x) = f(x)$. Vektorové pole, které má potenciál, nazýváme **potenciální**.

Věta 19.33 (hlavní věta teorie pole)

Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ je spojité vektorové pole. Uvažujme následující výroky:

(i) *Vektorové pole f je potenciální.*

(ii) *Pro každé skoro regulární křivky $c_i\colon [a,b] \to \Omega$, $i \in \{1,2\}$, splňující $c_1(a) = c_2(a)$ a $c_1(b) = c_2(b)$ platí $\int_{c_1} f \cdot \mathrm{d}\, c_1 = \int_{c_2} f \cdot \mathrm{d}\, c_2$.*

(iii) *Pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ a $x \in \Omega$ platí $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.*

Věta 19.33 (hlavní věta teorie pole)

Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f \colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ je spojité vektorové pole. Uvažujme následující výroky:

(i) *Vektorové pole f je potenciální.*

(ii) *Pro každé skoro regulární křivky $c_i \colon [a,b] \to \Omega, i \in \{1,2\}$, splňující $c_1(a) = c_2(a)$ a $c_1(b) = c_2(b)$ platí $\int_{c_1} f \cdot \mathrm{d}\, c_1 = \int_{c_2} f \cdot \mathrm{d}\, c_2$.*

(iii) *Pro každé $i,j \in \{1,\dots,n\}$ a $x \in \Omega$ platí $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.*

Potom platí:

(a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Věta 19.33 (hlavní věta teorie pole)

Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ je spojité vektorové pole. Uvažujme následující výroky:

(i) *Vektorové pole f je potenciální.*

(ii) *Pro každé skoro regulární křivky $c_i\colon [a,b] \to \Omega$, $i \in \{1,2\}$, splňující $c_1(a) = c_2(a)$ a $c_1(b) = c_2(b)$ platí $\int_{c_1} f \cdot \mathrm{d}\, c_1 = \int_{c_2} f \cdot \mathrm{d}\, c_2$.*

(iii) *Pro každé $i,j \in \{1,\dots,n\}$ a $x \in \Omega$ platí $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.*

Potom platí:

(a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(b) *Je-li f třídy $\mathscr{C}^1$, pak* (i) $\Rightarrow$ (iii).

Věta 19.33 (hlavní věta teorie pole)

Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ je spojité vektorové pole. Uvažujme následující výroky:

(i) *Vektorové pole f je potenciální.*

(ii) *Pro každé skoro regulární křivky $c_i\colon [a,b] \to \Omega$, $i \in \{1,2\}$, splňující $c_1(a) = c_2(a)$ a $c_1(b) = c_2(b)$ platí $\int_{c_1} f \cdot \mathrm{d}\, c_1 = \int_{c_2} f \cdot \mathrm{d}\, c_2$.*

(iii) *Pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in \Omega$ platí $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.*

Potom platí:

(a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(b) *Je-li f třídy $\mathscr{C}^1$, pak* (i) $\Rightarrow$ (iii).

(c) *Je-li f třídy $\mathscr{C}^1$ a Ω je hvězdicovitá, pak* (iii) $\Rightarrow$ (i).

Definice

(a) Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená, $\Phi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathscr{C}^1$ a g je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$. **Plošný integrál prvního druhu** $\int_\Phi g \,\mathrm{d}\, S$ definujeme jako

$$\int_G g(\Phi(t)) \cdot \operatorname{vol} \Phi'(t) \,\mathrm{d}\, t,$$

pokud tento integrál konverguje.

Definice

(a) Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená, $\Phi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathscr{C}^1$ a g je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$. **Plošný integrál prvního druhu** $\int_\Phi g \, \mathrm{d}\, S$ definujeme jako

$$\int_G g(\Phi(t)) \cdot \operatorname{vol} \Phi'(t) \, \mathrm{d}\, t,$$

pokud tento integrál konverguje.

(b) Nechť $n \in \mathbf{N}$, $G \subset \mathbf{R}^{n-1}$ je otevřená, $\Phi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathscr{C}^1$ a f je vektorové pole z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$. **Plošný integrál druhého druhu** $\int_\Phi f \cdot \mathrm{d}\, \Phi$ definujeme jako

$$\int_G \left\langle f(\Phi(t)), \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}}(t) \right\rangle \mathrm{d}\, t,$$

20. Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

20.1 Diferencovatelnost skoro všude

Lemma 20.1 (lemma o vycházejícím slunci)

Nechť h je spojitá funkce na $[a, b]$. *Označme*

$$E_1 = \{x \in (a, b);\ \exists \xi \in (x, b) \colon h(\xi) > h(x)\},$$
$$E_2 = \{x \in (a, b);\ \exists \xi \in (a, x) \colon h(\xi) > h(x)\}.$$

20.1 Diferencovatelnost skoro všude

Lemma 20.1 (lemma o vycházejícím slunci)

Nechť h je spojitá funkce na $[a, b]$. Označme

$$E_1 = \{x \in (a, b);\ \exists \xi \in (x, b)\colon h(\xi) > h(x)\},$$
$$E_2 = \{x \in (a, b);\ \exists \xi \in (a, x)\colon h(\xi) > h(x)\}.$$

Potom platí

(a) *E_1 je sjednocením disjunktních intervalů $(a_j, b_j), j \in \mathbf{N}$, kde $h(a_j) \leq h(b_j)$,*

20.1 Diferencovatelnost skoro všude

Lemma 20.1 (lemma o vycházejícím slunci)

Nechť h je spojitá funkce na $[a, b]$. *Označme*

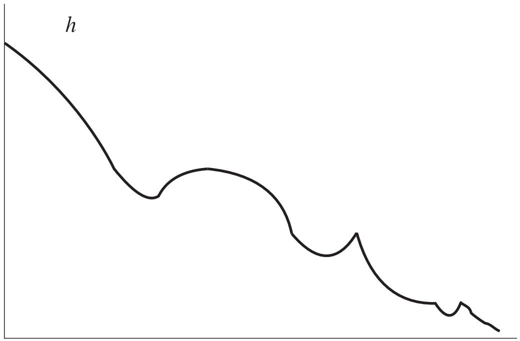
$$E_1 = \{x \in (a, b);\ \exists \xi \in (x, b)\colon h(\xi) > h(x)\},$$
$$E_2 = \{x \in (a, b);\ \exists \xi \in (a, x)\colon h(\xi) > h(x)\}.$$

Potom platí

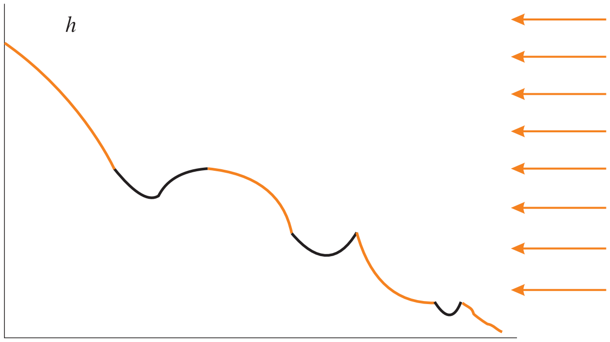
(a) E_1 *je sjednocením disjunktních intervalů* $(a_j, b_j), j \in \mathbf{N}$, *kde* $h(a_j) \leq h(b_j)$,

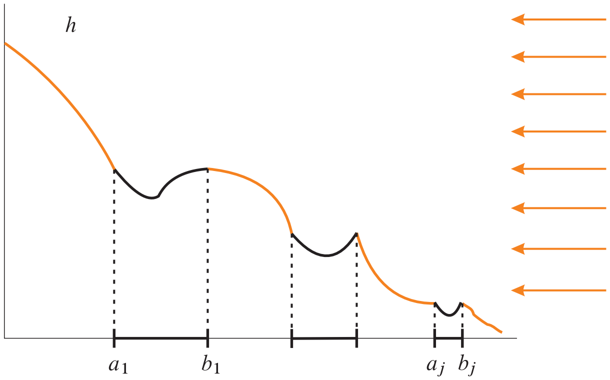
(b) E_2 *je sjednocením disjunktních intervalů* $(c_j, d_j), j \in \mathbf{N}$, *kde* $h(c_j) \geq h(d_j)$.

。

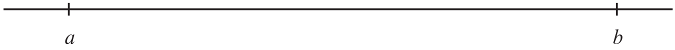

h

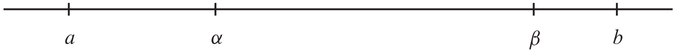
。

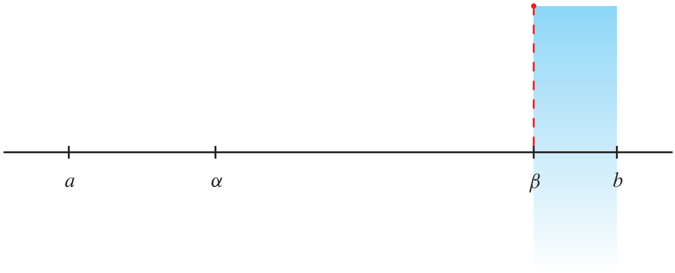

h



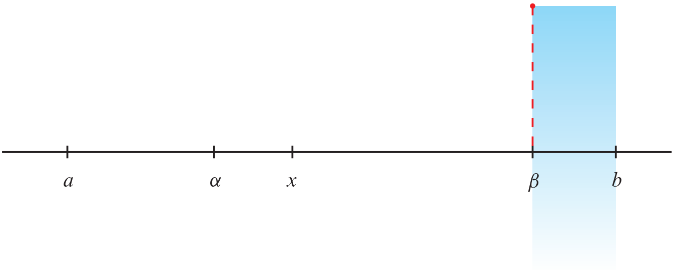
h
a1
b1
aj
bj

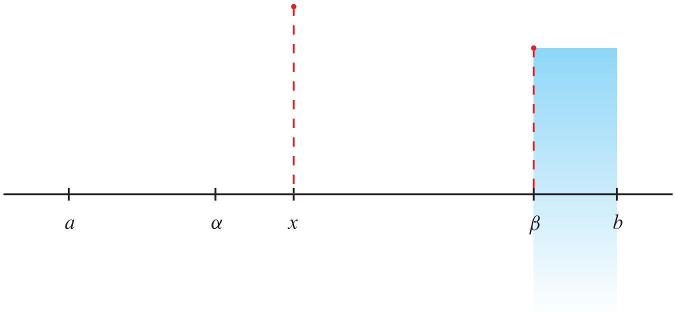

a
b

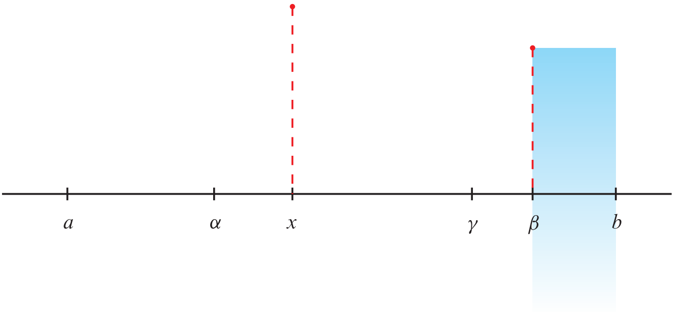

a
α
β
b

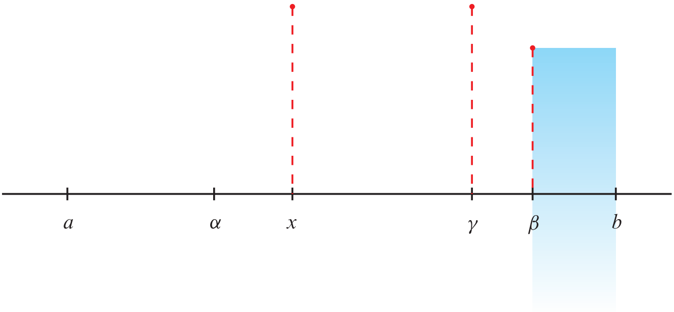


a
α
β
b

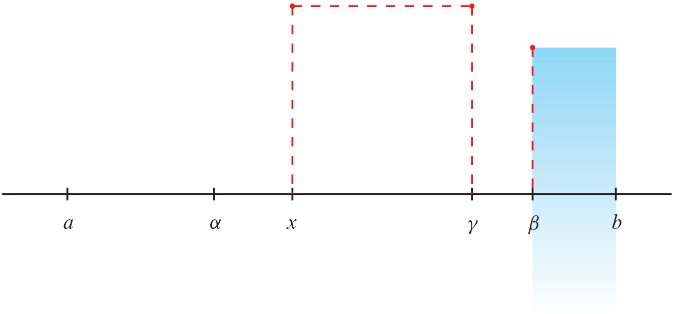

a
α
x
β
b

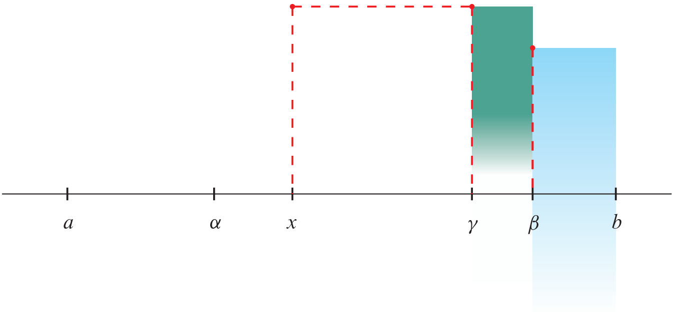

a
α
x
β
b


a
α
x
γ
β
b



a
α
x
γ
β
b


a
α
x
γ
β
b


a
α
x
γ
β
b

Lemma 20.2

Nechť f *je neklesající lipschitzovská funkce na intervalu* $[a, b]$*. Potom má* f *konečnou derivaci s.v. v intervalu* $[a, b]$*.*

K důkazu Lemmatu 20.2. Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $x \in \mathbf{R}$. **Derivovaná čísla** jsou definována předpisy:

$$D^+f(x) = \lim_{t\to 0+} \sup\Big\{\frac{f(y)-f(x)}{y-x};\ y \in (x, x+t)\Big\},$$

$$D_+f(x) = \lim_{t\to 0+} \inf\Big\{\frac{f(y)-f(x)}{y-x};\ y \in (x, x+t)\Big\},$$

$$D^-f(x) = \lim_{t\to 0+} \sup\Big\{\frac{f(y)-f(x)}{y-x};\ y \in (x-t, x)\Big\},$$

$$D_-f(x) = \lim_{t\to 0+} \inf\Big\{\frac{f(y)-f(x)}{y-x};\ y \in (x-t, x)\Big\}.$$

K důkazu Lemmatu 20.2. Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $x \in \mathbf{R}$. **Derivovaná čísla** jsou definována předpisy:

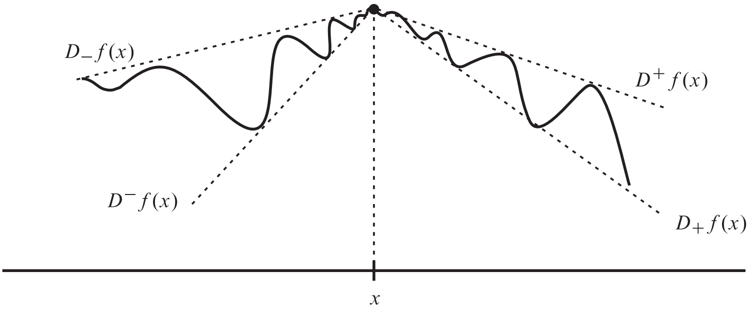
$$D^+f(x) = \lim_{t\to 0+} \sup\Big\{\frac{f(y)-f(x)}{y-x};\ y \in (x, x+t)\Big\},$$

$$D_+f(x) = \lim_{t\to 0+} \inf\Big\{\frac{f(y)-f(x)}{y-x};\ y \in (x, x+t)\Big\},$$

$$D^-f(x) = \lim_{t\to 0+} \sup\Big\{\frac{f(y)-f(x)}{y-x};\ y \in (x-t, x)\Big\},$$

$$D_-f(x) = \lim_{t\to 0+} \inf\Big\{\frac{f(y)-f(x)}{y-x};\ y \in (x-t, x)\Big\}.$$

Derivovaná čísla



Věta 20.3 (Lebesgue)

Nechť f je monotonní funkce na intervalu $[a, b]$. Potom má f konečnou derivaci s.v. v intervalu $[a, b]$.

Věta 20.3 (Lebesgue)

Nechť f je monotonní funkce na intervalu $[a, b]$. Potom má f konečnou derivaci s.v. v intervalu $[a, b]$.

Lemma 20.4

Nechť f je K-lipschitzovská funkce na množině $E \subset \mathbf{R}$. Potom $\lambda^*(f(E)) \leq K\lambda^*(E)$.

Věta 20.3 (Lebesgue)

Nechť f je monotonní funkce na intervalu $[a, b]$. Potom má f konečnou derivaci s.v. v intervalu $[a, b]$.

Lemma 20.4

Nechť f je K-lipschitzovská funkce na množině $E \subset \mathbf{R}$. Potom $\lambda^*(f(E)) \leq K\lambda^*(E)$.

Lemma 20.5

Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, $E \subset [a, b]$, $K \in \mathbf{R}$, $K > 0$, a $|f'(x)| \leq K$ pro každé $x \in E$. Potom $\lambda^*\big(f(E)\big) \leq K\lambda^*(E)$.

Věta 20.6

Nechť f je neklesající funkce na intervalu $[a, b]$. Potom $f' \in \mathscr{L}^1([a, b])$ a $\int_a^b f' \le f(b) - f(a)$.

20.2 Funkce s konečnou variací

Definice

Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. **Variaci funkce f na intervalu** $[a,b]$ definujeme předpisem

$$V_a^b(f) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|;\ \{x_i\}_{i=0}^{n} \text{ je dělení } [a,b] \right\}.$$

20.2 Funkce s konečnou variací

Definice

Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbf{C}$. **Variaci funkce** f **na intervalu** $[a,b]$ definujeme předpisem

$$V_a^b(f) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|;\ \{x_i\}_{i=0}^{n} \text{ je dělení } [a,b]\right\}.$$

Řekneme, že funkce $g\colon I \to \mathbf{C}$ má na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ **omezenou variaci**, jestliže existuje $K \in \mathbf{R}$ takové, že $V_a^b(g) < K$ pro každý interval $[a,b] \subset I$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu I značíme $BV(I)$.

Věta 20.7

Nechť $f: [a,b] \to \mathbf{R}$. *Platí* $f \in BV([a,b])$*, právě když existují neklesající a omezené funkce* $g, h: [a,b] \to \mathbf{R}$*, takové, že* $f = g - h$.

Věta 20.7

Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$. Platí $f \in BV([a,b])$, právě když existují neklesající a omezené funkce $g, h\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, takové, že $f = g - h$.

Věta 20.8

Nechť $f \in BV([a,b])$. Potom má f vlastní derivaci skoro všude v $[a,b]$.

20.3 Absolutně spojité funkce

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je **absolutně spojitá** na intervalu $[a,b]$, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, takové, že pro každou konečnou posloupnost bodů $a \leq a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b$ splňující $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$ platí $\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $AC([a,b])$.

Věta 20.9

(a) *Jestliže* $f \in AC([a,b])$*, potom* $f'(x)$ *existuje s.v. v* $[a,b]$*,* $f' \in \mathscr{L}^1([a,b])$ *a pro každé* $x, y \in [a,b],\ x \leq y$*, platí* $f(y) - f(x) = \int_x^y f'$*.*

Věta 20.9

(a) *Jestliže* $f \in AC([a,b])$*, potom* $f'(x)$ *existuje s.v. v* $[a,b]$*,* $f' \in \mathscr{L}^1([a,b])$ *a pro každé* $x, y \in [a,b],\ x \le y$*, platí* $f(y) - f(x) = \int_x^y f'$*.*

(b) *Nechť* $\varphi \in \mathscr{L}^1([a,b])$ *a* $f(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$*,* $x \in [a,b]$*. Potom* $f \in AC([a,b])$ *a* $f'(x) = \varphi(x)$ *s.v. v* $[a,b]$*.*

Věta 20.10 (integrace per partes)

Nechť $f, g \in AC([a, b])$. Potom

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

21. Fourierovy řady

21.1 Základní pojmy

Definice

(a) **Trigonometrickou řadou** rozumíme řadu funkcí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

kde $c_k \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{Z}$.

21.1 Základní pojmy

Definice

(a) **Trigonometrickou řadou** rozumíme řadu funkcí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

kde $c_k \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{Z}$.

(b) **Trigonometrickým polynomem** rozumíme funkci tvaru

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

kde $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $c_k \in \mathbf{C}$, $k = -n, \dots, n$.

Rovnice vedení tepla

Uvažujme **rovnici vedení tepla**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Rovnice vedení tepla

Uvažujme **rovnici vedení tepla**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Hledáme funkci $u\colon \mathbf{R} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$, která řeší (1) a navíc splňuje počáteční podmínku $u(x, 0) = f(x)$, kde f je daná 2π-periodická funkce.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.
Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.
Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.
Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní. Označme odpovídající konstantu λ.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.
Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní. Označme odpovídající konstantu λ. Funkce A musí být 2π-periodická, a proto $\lambda = -n^2$, kde $n \in \mathbf{Z}$.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce. Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní. Označme odpovídající konstantu λ. Funkce A musí být 2π-periodická, a proto $\lambda = -n^2$, kde $n \in \mathbf{Z}$. Funkce A je tedy lineární kombinací funkcí e^{inx} a e^{-inx}.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.
Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní. Označme odpovídající konstantu λ. Funkce A musí být 2π-periodická, a proto $\lambda = -n^2$, kde $n \in \mathbf{Z}$.
Funkce A je tedy lineární kombinací funkcí e^{inx} a e^{-inx}.
Funkce B je pak násobkem $e^{-n^2 t}$.

Rovnice vedení tepla

Tyto úvahy nás vedou k hledání řešení ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} e^{inx}. \tag{2}$$

Rovnice vedení tepla

Tyto úvahy nás vedou k hledání řešení ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} e^{inx}. \tag{2}$$

Pro $t = 0$ má platit

$$u(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

Lemma 21.1

Nechť posloupnost $\left\{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně k* f *na* $\mathbf{R}$*. Potom pro každé* $k \in \mathbf{Z}$ *platí*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

Označení

(a) Množinu všech 2π-periodických funkcí s hodnotami v **C**, které jsou lebesgueovsky integrovatelné na intervalu $[0, 2\pi]$, budeme značit $\mathscr{P}(2\pi)$.

Označení

(a) Množinu všech 2π-periodických funkcí s hodnotami v **C**, které jsou lebesgueovsky integrovatelné na intervalu $[0, 2\pi]$, budeme značit $\mathscr{P}(2\pi)$.

(b) Pro $f \in \mathscr{P}(2\pi)$ definujeme pseudonormu předpisem

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx.$$

Základní pojmy

Definice (komplexní tvar Fourierovy řady)

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$. Pak definujeme

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Čísla $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbf{Z}$, nazýváme **komplexními Fourierovými koeficienty**. Řadu $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}$ nazýváme **komplexním tvarem Fourierovy řady funkce** f a jejím n**-tým částečným součtem** rozumíme

$$s_n^f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Řekneme, že **součet Fourierovy řady** v bodě $x \in \mathbf{R}$ je roven $s \in \mathbf{C}$, jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = s$.

J. Fourier (1768–1830)

Lemma 21.2

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Potom*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\,dt.$$

Označení

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$ a g je esenciálně omezená měřitelná 2π-periodická funkce. Potom definujeme

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Funkce $f * g$ se nazývá **konvoluce**.

21.2 Cesàrovská sčítatelnost Fourierových řad

Definice

Řekneme, že řada komplexních čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **sčítatelná Cesàrovou metodou** k číslu $\sigma \in \mathbf{C}$, jestliže platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \sigma,$$

kde $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$. Píšeme $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$.

Označení

- Pro $f \in \mathscr{P}(2\pi)$ a $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ položíme

$$\sigma_n^f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j^f(x).$$

Označení

- Pro $f \in \mathscr{P}(2\pi)$ a $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ položíme

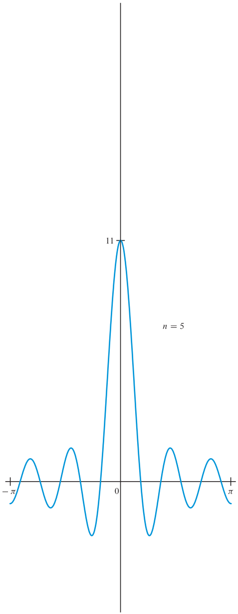
$$\sigma_n^f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j^f(x).$$

- Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ položíme

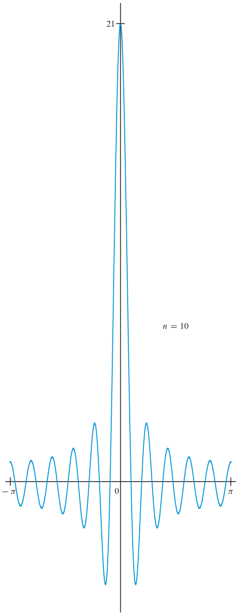
$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}, \qquad \textbf{(Dirichletovo jádro)}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(x). \qquad \textbf{(Fejérovo jádro)}$$

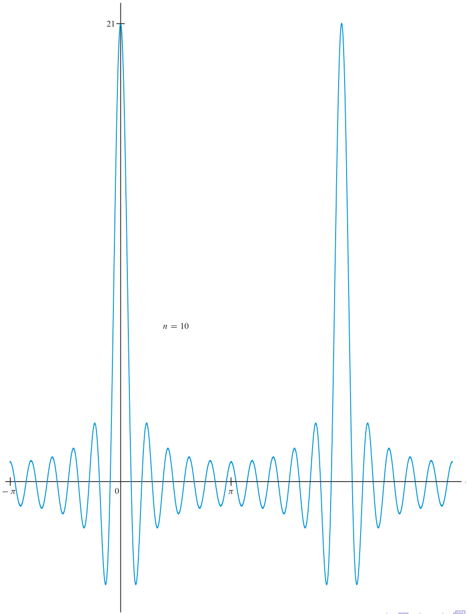
Dirichletovo jádro



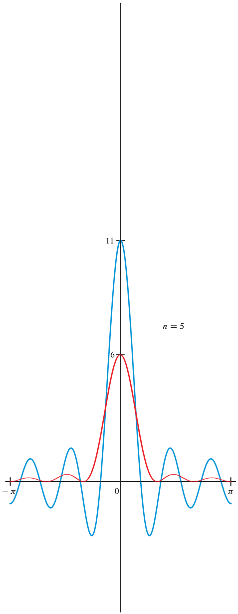
Dirichletovo jádro



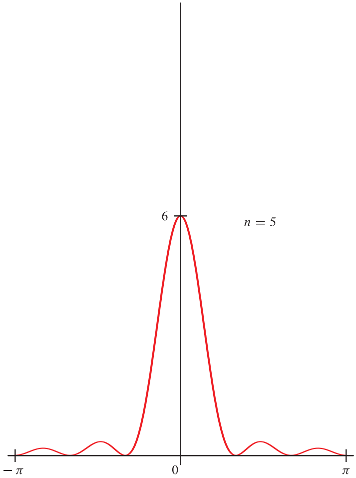
Dirichletovo jádro



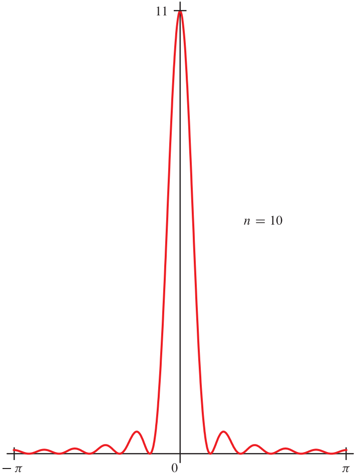
Dirichletovo a Fejérovo jádro



Fejérovo jádro



Fejérovo jádro



Lemma 21.3 (vlastnosti Dirichletova jádra)

(a) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

Lemma 21.3 (vlastnosti Dirichletova jádra)

(a) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

(b) *Funkce* D_n *je spojitá, sudá,* 2π*-periodická a* $D_n(0) = 2n+1$*.*

Lemma 21.3 (vlastnosti Dirichletova jádra)

(a) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

(b) *Funkce* D_n *je spojitá, sudá,* 2π*-periodická a* $D_n(0) = 2n + 1$*.*

(c) *Platí* $\int_0^{2\pi} D_n(x)\, dx = 2\pi$*.*

Lemma 21.3 (vlastnosti Dirichletova jádra)

(a) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

(b) *Funkce* D_n *je spojitá, sudá,* 2π*-periodická a* $D_n(0) = 2n + 1$.

(c) *Platí* $\int_0^{2\pi} D_n(x)\,dx = 2\pi$.

(d) *Pro každé* $f \in \mathscr{P}(2\pi)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *a* $x \in \mathbf{R}$ *platí* $s_n^f(x) = f * D_n(x)$.

Lemma 21.4 (vlastnosti Fejérova jádra)

(a) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} \right)^2 .$$

Lemma 21.4 (vlastnosti Fejérova jádra)

(a) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2 .$$

(b) *Funkce* K_n *je spojitá, nezáporná, sudá,* 2π*-periodická a* $K_n(0) = n+1$*.*

Lemma 21.4 (vlastnosti Fejérova jádra)

(a) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2 .$$

(b) *Funkce* K_n *je spojitá, nezáporná, sudá,* 2π*-periodická a* $K_n(0) = n+1$*.*

(c) *Platí* $\int_0^{2\pi} K_n(x)\,dx = 2\pi$*.*

Lemma 21.4 (vlastnosti Fejérova jádra)

(a) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2 .$$

(b) *Funkce* K_n *je spojitá, nezáporná, sudá,* 2π*-periodická a* $K_n(0) = n+1$.

(c) *Platí* $\int_0^{2\pi} K_n(x)\,dx = 2\pi$.

(d) *Pro každé* $f \in \mathscr{P}(2\pi)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *a* $x \in \mathbf{R}$ *platí* $\sigma_n^f(x) = f * K_n(x)$.

Lemma 21.4 (vlastnosti Fejérova jádra)

(a) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} \right)^2 .$$

(b) *Funkce* K_n *je spojitá, nezáporná, sudá,* 2π*-periodická a* $K_n(0) = n + 1$*.*

(c) *Platí* $\int_0^{2\pi} K_n(x)\, dx = 2\pi$*.*

(d) *Pro každé* $f \in \mathscr{P}(2\pi)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *a* $x \in \mathbf{R}$ *platí* $\sigma_n^f(x) = f * K_n(x)$*.*

(e) *Posloupnost* $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ *konverguje lokálně stejnoměrně k nulové funkci na intervalu* $(0, 2\pi)$*.*

Věta 21.5 (Fejérova věta)

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$ a $x \in \mathbf{R}$.

(a) *Má-li f v bodě x konečné jednostranné limity $f(x+)$, $f(x-)$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

(b) *Je-li f spojitá na intervalu $(a,b) \subset \mathbf{R}$, pak $\{\sigma_n^f\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a,b).*

Důsledek 21.6

Nechť $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ je spojitá 2π-periodická funkce. Potom existuje posloupnost trigonometrických polynomů $\{P_n\}$, která stejnoměrně konverguje k f na $\mathbf{R}$.

Věta 21.7

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} ||f - \sigma_n^f||_1 = 0$.

Věta 21.7

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} ||f - \sigma_n^f||_1 = 0$.

Věta 21.8 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.

Věta 21.7

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} ||f - \sigma_n^f||_1 = 0$.

Věta 21.8 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.

Věta 21.9 (o lokalizaci)

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $f, g \in \mathscr{P}(2\pi)$ *a* $f(t) = g(t)$ *pro každé* $t \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty}(s_n^f(x) - s_n^g(x)) = 0$.

Věta 21.7

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} ||f - \sigma_n^f||_1 = 0$.

Věta 21.8 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.

Věta 21.9 (o lokalizaci)

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $f, g \in \mathscr{P}(2\pi)$ *a* $f(t) = g(t)$ *pro každé* $t \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty}(s_n^f(x) - s_n^g(x)) = 0$.

Věta 21.10

Nechť $f, g \in \mathscr{P}(2\pi)$ *a* $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ *pro každé* $k \in \mathbf{Z}$.
Potom $f = g$ *s.v.*

Věta 21.11 (Hardy)

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je posloupnost komplexních čísel taková, že existuje* $K \in \mathbf{R}$ *splňující* $|ka_k| \leq K$ *pro každé* $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. *Pokud* $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbf{C}$, *potom* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

G. H. Hardy (1877–1947)

K důkazu Hardyovy věty

$$([\lambda n] + 1)\sigma_{[\lambda n]} - (n + 1)\sigma_n = s_{n+1} + \cdots + s_{[\lambda n]}$$

K důkazu Hardyovy věty

$$([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-(n+1)\sigma_n = s_{n+1}+\cdots+s_{[\lambda n]}$$
$$= ([\lambda n]-n)s_n + ([\lambda n]-n)a_{n+1}+\cdots+a_{[\lambda n]}$$

K důkazu Hardyovy věty

$$([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - (n+1)\sigma_n = s_{n+1} + \cdots + s_{[\lambda n]}$$

$$= ([\lambda n]-n)s_n + ([\lambda n]-n)a_{n+1} + \cdots + a_{[\lambda n]}$$

$$([\lambda n]-n)(s_n-\sigma_n) = ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - (n+1)\sigma_n$$

$$- \sum_{n<k\leq[\lambda n]} ([\lambda n]+1-k)a_k - ([\lambda n]-n)\sigma_n$$

K důkazu Hardyovy věty

$$([\lambda n] + 1)\sigma_{[\lambda n]} - (n+1)\sigma_n = s_{n+1} + \cdots + s_{[\lambda n]}$$

$$= ([\lambda n] - n)s_n + ([\lambda n] - n)a_{n+1} + \cdots + a_{[\lambda n]}$$

$$([\lambda n] - n)(s_n - \sigma_n) = ([\lambda n] + 1)\sigma_{[\lambda n]} - (n+1)\sigma_n$$

$$- \sum_{n<k\leq[\lambda n]} ([\lambda n] + 1 - k)a_k - ([\lambda n] - n)\sigma_n$$

$$= ([\lambda n] + 1)\sigma_{[\lambda n]} - ([\lambda n] + 1)\sigma_n - \sum_{n<k\leq[\lambda n]} ([\lambda n] + 1 - k)a_k$$

K důkazu Hardyovy věty

$$([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-(n+1)\sigma_n = s_{n+1}+\cdots+s_{[\lambda n]}$$

$$=([\lambda n]-n)s_n+([\lambda n]-n)a_{n+1}+\cdots+a_{[\lambda n]}$$

$$([\lambda n]-n)(s_n-\sigma_n)=([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-(n+1)\sigma_n$$

$$-\sum_{n<k\le[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)a_k-([\lambda n]-n)\sigma_n$$

$$=([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-([\lambda n]+1)\sigma_n-\sum_{n<k\le[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)a_k$$

$$s_n-\sigma_n=\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma_{[\lambda n]}-\sigma_n)$$

K důkazu Hardyovy věty

$$([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - (n+1)\sigma_n = s_{n+1} + \cdots + s_{[\lambda n]}$$

$$= ([\lambda n]-n)s_n + ([\lambda n]-n)a_{n+1} + \cdots + a_{[\lambda n]}$$

$$([\lambda n]-n)(s_n-\sigma_n) = ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - (n+1)\sigma_n$$

$$- \sum_{n<k\le[\lambda n]} ([\lambda n]+1-k)a_k - ([\lambda n]-n)\sigma_n$$

$$= ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - ([\lambda n]+1)\sigma_n - \sum_{n<k\le[\lambda n]} ([\lambda n]+1-k)a_k$$

$$s_n - \sigma_n = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma_{[\lambda n]} - \sigma_n)$$

$$- \frac{1}{[\lambda n]-n} \sum_{n<k\le[\lambda n]} ([\lambda n]+1-k)a_k$$

Lemma 21.12

Pokud f je 2π-periodická funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$, potom existuje $K \in \mathbf{R}$ takové, že $|k\hat{f}(k)| \leq K$ pro každé $k \in \mathbf{Z}$.

Věta 21.13 (Jordanovo-Dirichletovo kritérium)

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$ je funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$ a $x \in \mathbf{R}$. Potom funkce f má v bodě x vlastní limitu zprava i zleva (označme je $f(x+)$ a $f(x-)$) a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

Věta 21.13 (Jordanovo-Dirichletovo kritérium)

Nechť $f \in \mathscr{P}(2\pi)$ je funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$ a $x \in \mathbf{R}$. Potom funkce f má v bodě x vlastní limitu zprava i zleva (označme je $f(x+)$ a $f(x-)$) a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

Je-li navíc f spojitá na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$, pak $s_n^f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na intervalu I.