KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

HAUSDORFFOVY MÍRY

1. Nechť $a, b \in \mathbf{R}^n$. Spočtěte $\mathscr{H}^1$-míru úsečky spojující body a, b.

2. Spočtěte $\mathscr{H}^1$-míru množiny $C = \{[3t, 3t^2, 2t^3]; t \in [0,1]\}$.

3. Spočtěte $\mathscr{H}^1$-míru množiny

$$M = \Big\{[x,y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = \big(1 + \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)^2\Big\}.$$

4. Spočtěte obsah sféry v $\mathbf{R}^3$ o poloměru 1.

5. Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$. Ukažte, že vektory $u^1, \dots, u^k \in \mathbf{R}^n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $\operatorname{vol}[u^1, \dots, u^k] \neq 0$.

6. Spočtěte obsah části povrchu rotačního hyperboloidu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; z = xy, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

7. Vypočtěte integrál $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^1$, kde C je obvod trojúhelníka s vrcholy $[0,0], [0,1], [1,0]$.

8. Vypočtěte integrál $\int_C y^2\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^1$, kde C je oblouk cykloidy $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi], a > 0$.

9. Spočtěte integrál $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^1$, kde C je kružnice se středem v bodě $[\frac{1}{2}, 0]$ a poloměru $\frac{1}{2}$.

10. Spočtěte křivkový integrál $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\,\mathscr{H}^1$, kde C je oblouk šroubovice, zadaný parametricky $x = a\cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.

11. Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je kladná funkce třídy $\mathscr{C}^1$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; \sqrt{y^2+z^2} = f(x)\}$. Potom $\mathscr{H}^2(M) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$.

KŘIVKY, PLOCHY A JEJICH ORIENTACE

12. Ukažte, že $\{0\} \times (0,1)^2 \subset \mathbf{R}^3$ je 2-plocha.

13. Ukažte, že $\{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| = 1\}$ je $(n-1)$-plocha.

14. Nechť $H \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $F\colon H \to \mathbf{R}^{n-k}$ $(k < n)$ je třídy $\mathscr{C}^1$ na H a $\operatorname{rank} F'(x) = n-k$ pro každé $x \in H$. Je-li $M = \{x \in \mathbf{R}^n; F(x) = 0\}$ neprázdná, potom je M k-plocha.

15. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní k-plocha. Dokažte, že potom $0 < \mathscr{H}^k(M) < \infty$.

16. Dokažte, že v $\mathbf{R}^n$ platí $\lambda^n\big(B(0,1)\big) = n\mathscr{H}^{n-1}\big(H(B(0,1))\big)$.

GREENOVA, GAUSSOVA A STOKESOVA VĚTA

17. Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_C xy^2\,dy - x^2 y\,dx,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o středu v počátku a poloměru $a > 0$.

18. Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy,$$

kde C je elipsa $\big\{[x,y] \in \mathbf{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\big\}$ orientovaná v kladném smyslu.

19. Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_C e^x(1 - \cos y)\,dx - e^x(y - \sin y)\,dy,$$

kde C je křivka s kladnou orientací, která vymezuje množinu $0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$.

20. (Steinerova hypocykloida) Uvažujme křivku $\varphi(t) = [2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t],\ t \in [0, 2\pi]$. Ukažte, že se jedná o jednoduchou uzavřenou skoro regulární křivku a spočtěte obsah množiny ohraničené touto křivkou.

21. Užitím Stokesovy věty vypočtěte

$$\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz,$$

kde

$$C = \{[a\sin^2 t, 2a\sin t\cos t, a\cos^2 t],\ t \in [0,\pi]\}, \quad a > 0,$$

a C je orientovaná ve směru růstu parametru t.

22. Spočtěte tok vektorového pole $F(x,y,z) = [y-z, z-x, x-y]$ kuželovou plochou

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 = z^2, z \in [0,h]\},$$

která je orientována vnější normálou.

23. Užitím Stokesovy věty vypočtěte integrál

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

kde kružnice

$$C = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0\}$$

je orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu z kladné části osy x.

24. Užitím Stokesovy věty vypočtěte integrál

$$\int_C (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz,$$

kde

$$C = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx,\ x^2 + y^2 = 2rx,\ 0 < r < R,\ z > 0\},$$

a kterou orientujeme tak, že menší část sférické plochy $\{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx\}$, kterou tato křivka vymezuje, zůstává po levé straně.

25. Spočtěte tok vektorového pole $F(x,y,z) = (z, 0, x^2)$ ve směru osy z parabolickou plochu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 = z, x, y \in [-1,1]\}.$$

26. Užitím Stokesovy věty vypočtěte

$$\int_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$$

kde 1-plocha

$$C = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1\}, \qquad a > 0, h > 0,$$

je orientovaná proti směru hodinových ručiček vzhledem ke kladné části osy.

27. Užitím Stokesovy věty vypočtěte integrál

$$\int_C y^2z^2\,dx + x^2z^2\,dy + x^2y^2\,dz,$$

kde 1-plocha

$$C = \{[a\cos t, a\cos 2t, a\cos 3t] \in \mathbf{R}^3; t \in [0,2\pi]\}$$

je orientována ve směru růstu parametru t.

Výsledky

1. $\|a-b\|$ **2.** 5 **3.** 8 **4.** 4π **6.** $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$ **7.** $1+\sqrt{2}$ **8.** $\frac{256}{15}a^3$ **9.** 2
10. $(2\pi a^2 + \frac{1}{3}(2\pi)^3 b^2)\sqrt{a^2+b^2}$ **17.** $\frac{1}{2}\pi a^4$ **18.** $-2\pi ab$ **19.** $-\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$ **20.** 2π **21.** 0
22. 0 **23.** $-\pi a^2\sqrt{3}$ **24.** $2\pi Rr^2$ **25.** $\frac{4}{3}$ **26.** $-2\pi a(a+h)$ **27.** 0