21. Fourierovy řady

21.1 Základní pojmy

DEFINICE

- Trigonometrickou řadou rozumíme řadu funkcí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad (*)$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Trigonometrickým polynomem rozumíme funkci tvaru

$$x \mapsto \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}, \qquad (**)$$

kde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $k = -m, \dots, m$.

POZNÁMKA

Řada $(*)$ konverguje, jestliže konverguje posloupnost $\left\{ \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \right\}_{m=0}^{\infty}$.

MOTIVACE

Rovnice vedení tepla $\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$u(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{-m^2 t} e^{imx}$$

$$u(x,0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} = f(x)$$

KONEC 22. PŘEDNÁŠKY, 16.5.2016

LEMMA 21.1

Nechť posloupnost $\left\{\sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikt}\right\}_{m=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na $\mathbb{R}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\,dt.$$

DŮKAZ

Platí $\displaystyle\sum_{k=-m}^{m} c_k e^{i(k-n)t} \rightrightarrows f(t)e^{-int}$ na $\mathbb{R}$, a proto

$$\int_0^{2\pi}\sum_{k=-m}^{m} c_k e^{i(k-n)t}\,dt \to \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt, \quad m \to \infty,$$

Pro $m \geq |n|$ máme

$$\int_0^{2\pi}\sum_{k=-m}^{m} c_k e^{i(k-n)t}\,dt = \int_0^{2\pi} c_n\,dt = 2\pi c_n = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt,$$

neboť

$$\int_0^{2\pi} e^{ijt}\,dt = \int_0^{2\pi}(\cos jt + i\sin jt)\,dt = \begin{cases} 0, & j \neq 0; \\ 2\pi, & j = 0. \end{cases}$$

■

OZNAČENÍ

Množinu všech 2π-periodických funkcí s hodnotami v $\mathbb{C}$, které jsou lebesgueovsky integrovatelné na intervalu $[0,2\pi]$, budeme značit $P(2\pi)$.

DEFINICE (komplexní tvar Fourierovy řady)

Nechť $f \in P(2\pi)$. Pak definujeme

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Čísla $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, nazýváme komplexními Fourierovými koeficienty. Řadu $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}$ nazýváme komplexním tvarem Fourierovy řady funkce f a jejím n-tým částečným součtem rozumíme

$$s_n^f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Řekneme, že součet Fourierovy řady v bodě $x \in \mathbb{R}$ je roven $s \in \mathbb{C}$, jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = s$.

POZNÁMKA

1, Rozdíl mezi trigonometrickou řadou a Fourierovou řadou.

2, Často se místo funkcí $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pracuje s funkcemi $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots$ Pak (komplexním) trigonometrickým polynomem, trigonometrickou řadou a Fourierovou řadou pro $f \in P(2\pi)$ rozumíme postupně

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$$

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$$

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{kde}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

3, Výše uvedené pojmy lze uvažovat i pro l-periodické funkce. Pak pracujeme se systémy $\{e^{i\frac{2\pi}{l}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ nebo $1, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}2x, \dots$

LEMMA 21.2

Nechť $f \in P(2\pi)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} (t)\,dt$

DŮKAZ

Z věty o substituci snadno plyne $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_{\alpha+2k\pi}^{\beta+2k\pi} f(t)\,dt$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta, k \in \mathbb{Z}$. Nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a \le 2k\pi < a + 2\pi$. Potom

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_a^{2k\pi} f(t)\,dt + \int_{2k\pi}^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(t)\,dt + \int_0^{a-2(k-1)\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

∎

OZNAČENÍ

(i) Nechť $f\in P(2\pi)$ a g je esenciálně omezená měřitelná 2π-periodická funkce. Potom definujeme

$$f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Funkce $f*g$ se nazývá konvoluce funkcí f a g.

(ii) Pro $f\in P(2\pi)$ definujeme pseudonormu předpisem

$$\|f\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx.$$

POZNÁMKA

1, Definice je korektní. Konvoluce se definuje i pro jiné třídy funkcí než výše a má spoustu zajímavých vlastností.

2, Platí

$x-t=r$

$t=x-r$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi} -f(r)g(x-r)\,dr=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-r)f(r)\,dr.$$

NEODPŘEDNESENO

3, O f,g můžeme předpokládat, že jsou borelovské. Potom zobrazení $[x,t]\mapsto f(x-t)g(t)$ je borelovské a lze pomocí Fubiniovy věty odvodit

$$\|f*g\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt\right|dx$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x-t)||g(t)|\,dt\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f\|_1|g(t)|\,dt=\|f\|_1\cdot\|g\|_1.$$

21.2 Césarovská sčítatelnost Fourierových řad

DEFINICE

Řekneme, že řada komplexních čísel $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ je sčítatelná Cesàrovou metodou k číslu $\sigma \in \mathbb{C}$, jestliže platí

$$\lim_{m\to\infty} \frac{s_0 + \dots + s_m}{m+1} = \sigma,$$

kde $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$. Píšeme $(C)\sum_{m=0}^{\infty} a_m = \sigma$.

POZNÁMKA

1, Pokud $\sum_{m=0}^{\infty} a_m = \sigma$, potom $(C)\sum_{m=0}^{\infty} a_m = \sigma$.

2, $(C)\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m = \frac{1}{2}$

$$s_0 = 1,\ s_1 = 0,\ s_2 = 1,\ \dots \qquad s_0 + \dots + s_m = \begin{cases} \frac{m}{2}+1, & m \text{ sudé;} \\ \frac{m+1}{2}, & m \text{ liché.} \end{cases}$$

OZNAČENÍ

- Pro $f \in P(2\pi)$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položíme

$$\sigma_m^f(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} s_j^f(x).$$

- Pro $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položíme

$$D_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx}, \qquad \text{(Dirichletovo jádro)}$$

$$K_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} D_j(x), \qquad \text{(Fejérovo jádro).}$$

LEMMA 21.3 (vlastnosti Dirichletova jádra)

(i) Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ platí

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

(ii) Funkce D_n je spojitá, sudá, 2π-periodická a $D_n(0) = 2n+1$.

(iii) Platí $\int_0^{2\pi} D_n(x)\,dx = 2\pi$.

(iv) Pro každé $f \in P(2\pi)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $s_n^f(x) = f * D_n(x)$

DŮKAZ

(i) Máme

$$D_n(x) = e^{-inx} \sum_{j=0}^{2n} (e^{ix})^j = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

(ii) a (iii) Zřejmé.

(iv) $$s_n^f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\,dt \cdot e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t)\,dt = D_n * f(x) = f * D_n(x).$$ ■

KONEC 23. PŘEDNÁŠKY, 18.5.2016

LEMMA 21.4 (vlastnosti Fejérova jádra)

(i) Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ platí

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t} \right)^2.$$

(ii) Funkce K_n je spojitá, nezáporná, sudá, 2π-periodická a $K_n(0) = n+1$.

(iii) $\int_0^{2\pi} K_n(t)\,dt = 2\pi$

(iv) Pro každé $f \in P(2\pi)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $\sigma_n^f(x) = K_n * f(x)$.

(v) Pro každé $\delta \in (0, \pi)$ platí $\lim_{n \to \infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(t)\,dt = 0$.

DŮKAZ

(i) Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$ platí $e^{i\frac{x}{2}} \neq e^{-i\frac{x}{2}}$ a můžeme psát

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\tfrac{1}{2}x + \sin\tfrac{3}{2}x + \dots + \sin(n+\tfrac{1}{2})x\right)$$

$$\frac{1}{(n+1)\sin\frac{x}{2}}\,\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x} + e^{i\frac{3}{2}x} - e^{-i\frac{3}{2}x} + \dots + e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)\sin\frac{x}{2}}\,\frac{1}{2i}\,\frac{1}{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}}\Big(e^{ix} - 1 + e^{i2x} - e^{-ix} + e^{i3x} - e^{-2ix} + \dots + e^{i(n+1)x} - e^{-inx}$$
$$-1 + e^{-ix} - e^{ix} + e^{-i2x} \qquad - e^{inx} + e^{-i(n+1)x}\Big)$$

$$= \frac{1}{(n+1)\sin\frac{x}{2}}\,\frac{1}{2i}\,\frac{1}{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}}\left(e^{i(n+1)x} - 1 + e^{-i(n+1)x} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)\sin\frac{x}{2}}\,\frac{1}{2i}\,\frac{1}{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2$$

(ii), (iii) zřejmé.

(iv) Platí

$$f * K_n(x) = \frac{1}{(n+1)}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\sum_{j=0}^{n} D_j(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} s_j^f(x) = \sigma_n^f(x).$$

(v) Zvolme $\delta \in (0,\pi)$ pevně. Potom pro $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$ platí

$$0 \le K_n(x) \le \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{(\sin\frac{1}{2}\delta)^2}.$$

Odtud máme $K_n \rightrightarrows 0$ na $[\delta, 2\pi-\delta]$.

■

VĚTA 21.5 (Fejér)

Nechť $f \in P(2\pi)$ a $x \in \mathbb{R}$.

(i) Má-li f v bodě x konečné jednostranné limity $f(x+)$, $f(x-)$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+)+f(x-)\right).$$

(ii) Je-li f spojitá na intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$, pak $\{\sigma_n f\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a,b).

DŮKAZ

(i) Označme $s = \frac{1}{2}\left(f(x+)+f(x-)\right)$. Počítejme

$$\sigma_n(f,x) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(x-t)-s\right) K_n(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x-t)-s\right) K_n(t)\,dt \qquad \text{[LEMMA 21.2]}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \left(f(x-t)-f(x+)\right) K_n(t)\,dt}_{I_n^1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left(f(x-t)-f(x-)\right) K_n(t)\,dt}_{I_n^2}$$

• $\lim I_n^1 = 0$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0,\pi)$, takové, že

$$\forall t \in (0,\delta): \left|f(x+t) - f(x+)\right| < \varepsilon.$$

Nalezněme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a $t \in [\delta,\pi]$ máme $|K_n(t)| < \varepsilon$. Počítejme pro $n \geq n_0$:

$$I_n^1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0} \left(f(x+r)-f(x+)\right) K_n(-r)(-1)\,dr \qquad \text{[substituce } r=-t\text{]}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left(f(x+r)-f(x+)\right) K_n(r)\,dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi},$$

$$|I_n^1| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} \varepsilon K_n(r)\,dr + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} \left|f(x+r)-f(x+)\right| \varepsilon\,dr$$

$$\leq \varepsilon + \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r)|\,dr + |f(x+)|\right)\varepsilon$$

• $\lim I_n^2 = 0$ Analogicky.

(ii) Zvolme $[A,B] \subset (a,b)$. Nalezneme $\omega \in (0,\pi)$, takové, že $[A-\omega, B+\omega] \subseteq (a,b)$. Označme $M := \sup\{|f(x)|;\, x \in [A,B]\}$. Platí $M \in \mathbb{R}$.
Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu díky stejnoměrné spojitosti f na $[A-\omega, B+\omega]$ nalezneme $\delta \in (0,\omega)$ takové, že

$$\forall x \in [A,B]\ \forall t \in (-\delta,\delta) : |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ platí $K_n(t) < \varepsilon$. Potom pro $x \in [A,B]$ a $n \geq n_0$ platí

$$\left|\sigma_n^f(x) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\, K_n(t)\,dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)|\, K_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|\, K_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\, K_n(t)\,dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)|\, \varepsilon\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon\, K_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\, \varepsilon\,dt$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|\,dz + |f(x)| + 1\right)\varepsilon \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|\,dz + M + 1\right)\varepsilon$$

Platí tedy $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[A,B]$. ■

DŮSLEDEK 21.6

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá 2π-periodická funkce. Potom existuje posloupnost trigonometrických polynomů $\{P_n\}$, která stejnoměrně konverguje k f na $\mathbb{R}$.

DŮKAZ

Podle Fejérovy věty platí $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[0, 2\pi]$, a tedy i na $\mathbb{R}$. Funkce σ_n^f je trigonometrický polynom. ■

POZNÁMKA

Pokud je f reálná, pak i σ_n^f je reálná funkce. Srovnejte s Weierstrassovou větou 13.9. Existuje tzv. Stone-Weierstrassova věta zahrnující 17.6 i 13.9.

VĚTA 21.7

Nechť $f \in P(2\pi)$. Potom $\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n^f\|_1 = 0$.

DŮKAZ

Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme spojitou funkci $g \in P(2\pi)$ takovou, že $\|f-g\|_1 < \varepsilon$.
Potom máme

$$\|f - \sigma_n^f\|_1 \le \|f-g\|_1 + \|g - \sigma_n^g\|_1 + \|\sigma_n^g - \sigma_n^f\|_1.$$

Platí $\sigma_n^g \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$ (VĚTA 17.5), a tedy $\lim \|g - \sigma_n^g\|_1 = 0$. Dále máme

$$\|\sigma_n^g - \sigma_n^f\|_1 = \|(g-f) * K_n\|_1 \le \|g-f\|_1 \cdot \|K_n\|_1 < \varepsilon.$$

Potom tedy máme $\limsup \|f - \sigma_n^f\|_1 \le \varepsilon + 2\pi\varepsilon$. Tím je tvrzení dokázáno. ∎

KONEC 24. PŘEDNÁŠKY, 23.5.2016

VĚTA 21.8 (Riemann-Lebesgueovo lemma)

Nechť $f \in P(2\pi)$. Potom $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.

DŮKAZ

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle VĚTY 21.7 nalezneme trigonometrický polynom P takový, že $\|f - P\|_1 < \varepsilon$.

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |n| \ge n_0 : \hat{P}(n) = 0.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$, $|n| \ge n_0$, potom platí

$$|\hat{f}(n)| = |\hat{f}(n) - \hat{P}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) - P(t)) e^{-int} \, dt \right| \le \|f - P\|_1 < \varepsilon.$$

∎

VĚTA 21.9 (o lokalizaci)

Nechť $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, $x\in\mathbb{R}$, $f,g\in P(2\pi)$ a $f(t)=g(t)$ pro každé $t\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^f(x)-s_n^g(x)=0$.

DŮKAZ

Platí

$$s_n^f(x)-s_n^g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-g(x-t))\,D_n(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{f(x-t)-g(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}}_{h(t)}\cdot\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\underbrace{h(t)\frac{1}{2i}e^{it/2}}_{\in\mathcal{L}^1}\cdot e^{int}-\underbrace{h(t)\frac{1}{2i}e^{-it/2}}_{\in\mathcal{L}^1}\cdot e^{-int}\Big)\,dt\xrightarrow{R-L}0$$

■

VĚTA 21.10

Nechť $f,g\in P(2\pi)$. Jestliže $\hat{f}(k)=\hat{g}(k)$ pro každé $k\in\mathbb{Z}$, potom $f=g$ s.v.

DŮKAZ

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ máme $\sigma_n^f=\sigma_n^g$. Podle VĚTY 21.7 platí $\sigma_n^f\to f$, $\sigma_n^g\to g$ v L^1, a tedy $f=g$ s.v. ■

21.3 Bodová konvergence Fourierových řad

VĚTA 21.11 (Hardy)

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel taková, že existuje $K\in\mathbb{R}$ splňující $|ka_k|\le K$ pro každé $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Pokud $(C)\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=s\in\mathbb{C}$, potom $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=s$.

DŮKAZ

Označme $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$,

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \dots + s_n).$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$, takové, že $K(\lambda-1) < \varepsilon$.
Potom $\sum_{n<k\leq[\lambda n]} |a_k| \leq \frac{K}{n}(\lambda n - n) = K(\lambda-1)$. (*)

Platí

$$([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - (n+1)\sigma_n = s_{n+1} + \dots + s_{[\lambda n]}$$

$$= ([\lambda n]-n)s_n + ([\lambda n]-n)a_{n+1} + ([\lambda n]-n-1)a_{n+2} + \dots + a_{[\lambda n]}$$

Potom

$$([\lambda n]-n)(s_n - \sigma_n) = ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - (n+1)\sigma_n - \sum_{n<k\leq[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)a_k - ([\lambda n]-n)\sigma_n$$

$$= ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - ([\lambda n]+1)\sigma_n - \sum_{n<k\leq[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)a_k.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $(\lambda-1)n_0 - 1 > 0$. Potom pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, můžeme psát

$$s_n - \sigma_n = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma_{[\lambda n]} - \sigma_n) - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{n<k\leq[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)a_k$$

$$|s_n - \sigma_n| \leq \frac{\lambda n + 2}{(\lambda-1)n-1}\left(|\sigma_{[\lambda n]} - s| + |\sigma_n - s|\right) + \frac{(\lambda n + 1 - n)}{[\lambda n]-n}\sum_{n<k\leq[\lambda n]}|a_k|$$

$$\leq \frac{\lambda n + 2}{(\lambda-1)n-1}\left(|\sigma_{[\lambda n]} - s| + |\sigma_n - s|\right) + \frac{(\lambda-1)n-1}{(\lambda-1)n-1}\cdot K(\lambda-1)$$

Odtud plyne $\limsup_{n\to\infty} |s_n - \sigma_n| \leq \frac{\lambda}{\lambda-1}\cdot 0 + K(\lambda-1) < \varepsilon$.

Potom $\lim |s_n - \sigma_n| = 0$, a tedy $\lim s_n = s$. ∎

LEMMA 21.12

Pokud f je 2π-periodická funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$, potom existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|k \hat{f}(k)| \leq K$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$.

DŮKAZ

Platí

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$$

Substituce $y = x - \frac{\pi}{n}$ pro $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, dává

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi - \frac{\pi}{n}} f\left(y + \frac{\pi}{n}\right) e^{-iny + i\pi} \, dy$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(y + \frac{\pi}{n}\right) e^{-iny} \, dy$$

Potom máme

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\right) e^{-inx} \, dx,$$

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx$$

Dále platí

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| dx = \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Potom

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{8\pi n} \sum_{k=1}^{2|n|} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| dx$$

$$\leq \frac{1}{8\pi n} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{2|n|} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi n} \displaystyle\int_0^{2\pi} V_x^{x+2\pi} f \, dx & (n > 0) \\[2ex] \dfrac{1}{8\pi n} \displaystyle\int_0^{2\pi} V_{x-2\pi}^{x} f \, dx & (n < 0) \end{cases} = \frac{1}{8\pi n} \int_0^{2\pi} V_0^{2\pi}(f) \, dx$$

$$= \frac{V_0^{2\pi}(f)}{4n}$$

VĚTA 21.13 (Jordanovo-Dirichletovo kritérium)

Nechť $f \in P(2\pi)$ je funkce s konečnou variací na intervalu $[0, \pi]$ a $x \in \mathbb{R}$. Potom funkce f má v bodě x vlastní limitu zprava i zleva (označme je $f(x+), f(x-)$) a platí

$$\lim_{n \to \infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right).$$

Je-li navíc f spojitá na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, pak $s_n^f \rightrightarrows f$ na intervalu I.

DŮKAZ

Vlastní limity existují podle věty o charakterizaci funkcí s omezenou variací.

Položme: $a_0 = \hat{f}(0)\, e^{i0x}$,

$a_1 = \hat{f}(-1)\, e^{-ix} + \hat{f}(1)\, e^{ix}$,

$a_2 = \hat{f}(-2)\, e^{-i2x} + \hat{f}(2)\, e^{i2x}$,

$\vdots$

$a_n = \hat{f}(-n)\, e^{-inx} + \hat{f}(n)\, e^{inx}$.

LEMMA 21.12

Potom $|k a_k| \leq |k \hat{f}(-k)| + |k \hat{f}(-k)| \leq 2K$. (*)

Poněvadž $\sigma_n^f(x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$, dostáváme podle Hardyovy věty také $s_n^f(x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$, neboť $s_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ a platí (*). ∎