# 19. Křivkový a plošný integrál

## 19.1. Hausdorffovy míry

MOTIVACE

- Lebesgueova míra je matematickým vyjádřením intuitivního pojmu objem. Podobně chceme precizovat pojem povrchu.
- Schwarzův příklad aneb jak nedefinovat povrch.
- Zvolíme jeden z možných přístupů pomocí pokrývání.

OZNAČENÍ

Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \le m$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Pro $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, položme

$$\mathcal{H}^k(A,\delta) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} A_j)^k ;\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \mathbb{R}^m, \operatorname{diam} A_j \le \delta \right\},$$

kde normalizační člen $\alpha_k \in (0,\infty)$ bude určen později,

$$\mathcal{H}^k(A) = \sup \mathcal{H}^k(A,\delta).$$

POZNÁMKY

(1) Pro $\delta_1 > \delta_2 > 0$ platí $\mathcal{H}^k(A,\delta_1) \le \mathcal{H}^k(A,\delta_2)$. Máme tedy $\mathcal{H}^k(A) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{H}^k(A,\delta)$.

(2) Pokrývat můžeme jen uzavřenými nebo otevřenými $A_j$ a dostaneme stejný výsledek $\mathcal{H}^k(A)$. V prvním případě nahradíme pokrytí $\{A_j\}$ pokrytím $\{\overline{A_j}\}$, ve druhém $\{B(A_j, \frac{\varepsilon}{2^j})\}$.

VĚTA 19.1

Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \le m$. Potom je $\mathcal{H}^k$ vnější míra na $\mathbb{R}^m$.

DŮKAZ

$\mathcal{H}^k(\emptyset) = 0$: $\mathcal{H}^k(\emptyset,\delta) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^k(\emptyset) = 0$

monotonie $\mathcal{H}^k$: $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{H}^k(A,\delta) \le \mathcal{H}^k(B,\delta)$

$\Rightarrow \mathcal{H}^k(A) \le \mathcal{H}^k(B)$

+

$\sigma$-subaditivita $\mathcal{H}^k$: Nechť $M_i$, $i \in \mathbb{N}$, jsou podmnožiny $\mathbb{R}^m$. Pokud $\mathcal{H}^k(M_{i_0}) = \infty$ pro nějaké $i_0 \in \mathbb{N}$, potom zřejmě

$$\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i).$$

Předpokládejme tedy $\mathcal{H}^k(M_i) < \infty$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon > 0, \delta > 0$. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ nalezneme množiny $A_{i,j} \subseteq \mathbb{R}^k$, $j \in \mathbb{N}$, takové, že

- $M_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$,
- $\operatorname{diam} A_{i,j} < \delta$,
- $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} A_{i,j})^k < \mathcal{H}^k(M_i,\delta) + \varepsilon \cdot 2^{-i}$.

Potom
$$\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i, \delta\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} A_{i,j})^k$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i,\delta) + \varepsilon 2^{-i} \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i) + \varepsilon$$

Odtud plyne
$$\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i) + \varepsilon,$$

a tedy také
$$\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i).$$
■

VĚTA 19.2

Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \le m$. Potom je vnější míra $\mathcal{H}^k$ na $\mathbb{R}^m$ metrická a translačně invariantní.

DŮKAZ

$\mathcal{H}^k$ je metrická. Mějme $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ splňující $\inf\{\|x-y\|;\ x \in A, y \in B\} = \delta_0 > 0$. Nechť $\delta \in (0,\delta_0)$. Pro $M \subseteq A \cup B$, $\operatorname{diam} M < \delta$, platí $M \subseteq A$ nebo $M \subseteq B$. Odtud plyne $\mathcal{H}^k(A \cup B, \delta) = \mathcal{H}^k(A,\delta) + \mathcal{H}^k(B,\delta)$. Limitním přechodem $\delta \to 0+$ dostaneme $\mathcal{H}^k(A \cup B) = \mathcal{H}^k(A) + \mathcal{H}^k(B)$.

$\mathcal{H}^k$ je translačně invariantní. Tvrzení plyne z definice $\mathcal{H}^k$ a zřejmého faktu, že $\operatorname{diam}(A+x) = \operatorname{diam} A$, pro $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \neq \emptyset$, $x \in \mathbb{R}^m$.
■

**DEFINICE**

Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$. Množinovou funkci $A \mapsto \mathcal{H}^k(A)$ nazýváme $k$-dimenzionální Hausdorffova míra na $\mathbb{R}^m$.

**DŮSLEDEK 19.3**

Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$, a $A \subset \mathbb{R}^m$ je borelovská množina. Potom je $A$ $\mathcal{H}^k$-měřitelná.

**LEMMA 19.4**

Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$. Potom $0 < \mathcal{H}^k([0,1)^k \times \{0\}^{m-k}) < \infty$.

DŮKAZ

Označme $K = [0,1)^k \times \{0\}^{m-k}$.

$\mathcal{H}^k(K) < \infty$. Nechť $\delta > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{\sqrt{k}}{m} < \delta$. Množinu $K$ rozdělíme přirozeným způsobem na $m^k$ „krychlí" $K_j$, $j = 1, \dots, m^k$, o délce hrany $\frac{1}{m}$. Potom $\operatorname{diam} K_j = \frac{\sqrt{k}}{m} < \delta$. Potom

$$\mathcal{H}^k(K, \delta) \leq \alpha_k \cdot m^k \cdot \left(\frac{\sqrt{k}}{m}\right)^k = \alpha_k (\sqrt{k})^k.$$

Odtud plyne $\mathcal{H}_k(K) \leq \alpha_k (\sqrt{k})^k < \infty$.

$\mathcal{H}^k(K) > 0$. Nechť $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ je projekce definovaná předpisem $\pi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_k)$. Pro $A \subset \mathbb{R}^m$ definujme $\mu(A) = \lambda^{k*}(\pi(A))$. Pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^m$ platí $\mu(A) \leq (\operatorname{diam} A)^k$. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ je posloupnost množin taková, že $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = K$. Potom

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} A_j)^k \geq \alpha_k \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \geq \alpha_k \mu(K) = \alpha_k > 0.$$

Platí tedy $\mathcal{H}^k(K) > 0$ ■

**OZNAČENÍ**

Koeficient $\alpha_k$ zvolíme tak, aby platilo $\mathcal{H}^k([0,1]^k \times \{0\}^{m-k}) = 1$.

**POZNÁMKA**

Lze dokázat, že $\alpha_k = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)2^k}$, kde $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx$, $s > 0$.

VĚTA 19.5 (regularita Hausdorffovy míry)
Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$, a $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Potom existuje borelovská množina $B \subseteq \mathbb{R}^m$ taková, že $A \subseteq B$ a $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$.

DŮKAZ
Pokud $\mathcal{H}^k(A) = \infty$, stačí položit $B = \mathbb{R}^m$.
Pokud $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, nalezneme $F_\sigma$ množinu $F_n$, $n \in \mathbb{N}$, takovou, že

$$\mathcal{H}^k(F_n, \tfrac{1}{n}) < \mathcal{H}^k(A, \tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{n} \quad \text{a} \quad A \subseteq F_n.$$

Položme $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Potom $A \subseteq B$ a

$$\mathcal{H}^k(A, \tfrac{1}{n}) \leq \mathcal{H}^k(B, \tfrac{1}{n}) \leq \mathcal{H}^k(F_n, \tfrac{1}{n}) < \mathcal{H}^k(A, \tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{n},$$

tedy $\mathcal{H}^k(A) \leq \mathcal{H}^k(B) \leq \mathcal{H}^k(A)$, a tedy $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$.
Množina $B$ je $F_{\sigma\delta}$, a tedy borelovská. ■

VĚTA 19.6
Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{R}^m$. Potom $\mathcal{H}^m(A) = \lambda^{m*}(A)$.

DŮKAZ
Platí $\mathcal{H}^m([0,1)^m) = \lambda^{m*}([0,1)^m)$. Z translační invariantnosti $\mathcal{H}^m$ a $\lambda^{m*}$ obdržíme rovnost $\mathcal{H}^m(Q) = \lambda^{m*}(Q)$, kde $Q$ je množina tvaru

$$\prod_{i=1}^{m} \left[\frac{l_i}{2^n}, \frac{l_i+1}{2^n}\right), \quad l_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m, \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Označme $\mathcal{Q}$ systém všech množin v tomto tvaru, tzv. dyadické krychle.

PLATÍ: $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q} \Rightarrow Q_1 \subseteq Q_2 \vee Q_2 \subseteq Q_1 \vee Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ (*)

PLATÍ: Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Potom lze $G$ zapsat jako spočetné disjunktní sjednocení dyadických krychlí.

Nejprve napišme: $G = \bigcup \underbrace{\{Q \in \mathcal{Q};\ Q \subseteq G\}}_{\mathcal{G}}$

Pro každou $Q \in \mathcal{G}$ nalezneme $M(Q) \in \mathcal{G}$, která je maximální vzhledem k inkluzi a splňuje $Q \subseteq M(Q)$. Taková krychle existuje díky (*) a tvaru $\mathcal{G}$. Označme $\mathcal{G}^* = \{M(Q);\ Q \in \mathcal{G}\}$. Potom platí

- $\bigcup \mathcal{G}^* = G$ (zřejmé)
- $\mathcal{G}^*$ je disjunktní

$$M(Q_1) \cap M(Q_2) \neq \emptyset \overset{(*)}{\Longrightarrow} M(Q_1) \subseteq M(Q_2) \vee M(Q_2) \subseteq M(Q_1)$$
$$\overset{\text{maximalita}}{\Longrightarrow} M(Q_1) = M(Q_2)$$

Dostáváme $\mathcal{H}^m(G) = \lambda^m(G) = \lambda^{m*}(G)$ pro každou $G \subseteq \mathbb{R}^m$ otevřenou. Označme $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin $\mathbb{R}^m$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{G} \text{ je uzavřený na konečné průniky} \\ B(0,m) \nearrow \mathbb{R}^m,\ m \to \infty \\ \lambda^m(B(0,m)) < \infty \end{array}\right\} \overset{\text{TH1, DŮSLEDEK 8.3}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{H}^m = \lambda^m \text{ na borelovských množinách}$$

Nechť nyní $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Nalezneme borelovské množiny $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ splňující $A \subseteq B_1$, $A \subseteq B_2$ a $\mathcal{H}^m(A) = \mathcal{H}^m(B_1)$, $\lambda^{m*}(A) = \lambda^m(B_2)$. Položme $B = B_1 \cap B_2$. Potom

$$\mathcal{H}^m(A) = \mathcal{H}^m(B) \underset{\text{B je borelovská}}{=} \lambda^m(B) = \lambda^{m*}(A)$$

∎

VĚTA 19.4 (vlastnosti Hausdorffovy míry)

(a) nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $I : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je izometrie a $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Potom $\mathcal{H}^k(I(E)) = \lambda^{k*}(E)$.

(b) nechť $k, n, m \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $k \leq m$, a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je $\beta$-lipschitzovské, $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom $\mathcal{H}^k(f(E)) \leq \beta^k \mathcal{H}^k(E)$.

(c) nechť $k_1, k_2, n \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2 \leq n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Jestliže $\mathcal{H}^{k_1}(A) < \infty$, pak $\mathcal{H}^{k_2}(A) = 0$.

KONEC 9. PŘEDNÁŠKY, 21.3.2016

DŮKAZ

(a)
$$\left.\begin{array}{l} E \subseteq \bigcup A_j \Rightarrow I(E) \subseteq \bigcup I(A_j) \\ I(E) \subseteq \bigcup C_j \Rightarrow E \subseteq \bigcup I^{-1}(C_j) \end{array}\right\} \mathcal{H}^k(E,\delta) = \mathcal{H}^k(I(E),\delta)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{H}^k(E)}_{\lambda^{k*}(E)} = \mathcal{H}^k(I(E))$$

(b) $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, $\operatorname{diam} A_j < \delta$

$$\Rightarrow f(E) \subseteq \bigcup f(A_j), \ \operatorname{diam} f(A_j) < \beta\delta$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(f(E), \delta) \leq \sum (\operatorname{diam} f(A_j))^k \alpha_k \leq \sum \alpha_k \beta^k (\operatorname{diam} A_j)^k$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(f(E), \delta) \leq \beta^k \mathcal{H}^k(E, \beta\delta)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(f(E)) \leq \beta^k \mathcal{H}^k(E)$$

(c) $A = \bigcup A_j$, $\operatorname{diam} A_j \leq \delta$

$$\mathcal{H}^{k_2}(A,\delta) \leq \sum \alpha_{k_2} (\operatorname{diam} A_j)^{k_2} \leq \frac{\alpha_{k_2}}{\alpha_{k_1}} \delta^{k_2 - k_1} \sum \alpha_{k_1} (\operatorname{diam} A_j)^{k_1}$$

$$\mathcal{H}^{k_2}(A,\delta) \leq \frac{\alpha_{k_2}}{\alpha_{k_1}} \delta^{k_2 - k_1} \mathcal{H}^{k_1}(A,\delta)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^{k_2}(A) = 0$$

■

**LEMMA 19.8**

Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \le m$, a $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ je prosté lineární zobrazení. Potom pro každou $\lambda^k$-měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}^k$ platí

$$\mathcal{H}^k(L(A)) = \sqrt{\det L^T L} \cdot \lambda^k(A).$$

**DŮKAZ**

Platí $\dim \operatorname{Im} L = k$. Existuje tedy lineární izometrie $I : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ taková, že $\operatorname{Im} Q = \operatorname{Im} L$. Potom platí

$$\mathcal{H}^k(L(A)) \underset{\text{VĚTA 19.4(a)}}{=} \mathcal{H}^k(\underbrace{Q^{-1} \circ L(A)}_{\lambda^k\text{-měřitelná}}) = \lambda^k(Q^{-1} \circ L(A))$$

$$= \det(Q^{-1} L) \cdot \lambda^k(A). \quad (\text{věta o substituci}) \ \text{TMI VĚTA 16.6}$$

Počítejme

$$\det{}^2(Q^{-1} L) = \det\left((Q^{-1} L)^T Q^{-1} L\right)$$

$$= \det\left(\langle Q^{-1} L e_i, Q^{-1} L e_j \rangle\right)_{i,j=1}^{m}$$

$$= \det\left(\langle L e_i, L e_j \rangle_{i,j=1}^{k}\right) = \det(L^T L). \quad \blacksquare$$

**ZNAČENÍ**

Nechť $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ je lineární. Označme $\operatorname{vol} L = \sqrt{\det(L^T L)}$.

**DEFINICE** Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \le m$, $G \subseteq \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$. Řekneme, že $\varphi$ je regulární na $G$, jestliže je třídy $\mathcal{C}^1$ na $G$ a $\varphi'(x)$ je prosté pro každé $x \in G$.

**POZNÁMKY**

1, vol ... volume = objem

2, $\det(L^T L) = \det\left(\langle u^i, u^j \rangle\right)_{i,j=1}^{k}$

$$L = \underset{m \times k}{\begin{pmatrix} | & & | \\ u^1 & \cdots & u^k \\ | & & | \end{pmatrix}} \qquad L^T L \ \dots \ \text{Gramova matice}$$

3, $\mathcal{H}^k(L([0,1]^k)) = \sqrt{\det(L^T L)}$ = objem rovnoběžnostěnu $L([0,1]^k)$

4, Je-li $\varphi \in \mathcal{C}^1(G)$, pak je $t \mapsto \operatorname{vol} \varphi'(t)$ spojité zobrazení.

LEMMA 19.9

Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\beta > 1$. Potom existuje okolí $V$ bodu $x$ takové, že

(a) zobrazení $y \mapsto \varphi(\varphi'(x)^{-1} y)$ je $\beta$-lipschitzovské na $\varphi'(x)(V)$,

(b) zobrazení $z \mapsto \varphi'(x)(\varphi^{-1}(z))$ je $\beta$-lipschitzovské na $\varphi(V)$.

DŮKAZ

Lineární zobrazení $v \mapsto \varphi'(x)(v)$ je prosté, a proto existuje $\eta > 0$ takové, že

$$\forall v \in \mathbb{R}^k : \|\varphi'(x)(v)\| \geq \eta \cdot \|v\|. \qquad (1)$$

Stačí položit $\eta = \inf\{\|\varphi'(x)(v)\|;\ v \in \mathbb{R}^k, \|v\| = 1\} > 0$ (díky spojitosti $\varphi'(x)$ a kompaktnosti sféry).

Nalezneme $\varepsilon \in (0, \eta)$ takové, že

$$\frac{2\varepsilon}{\eta} + 1 < \beta \qquad , \quad (2)$$

Nalezneme okolí $V$ bodu $x$ takové, že

$$\forall y \in V : \|\varphi'(y) - \varphi'(x)\| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $u, v \in V$ platí

$$\|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| \leq \varepsilon \|u - v\|. \qquad (3)$$

Uvažujme zobrazení (pro pevné $v \in V$)

$$g : w \mapsto \varphi(w) - \varphi(v) - \varphi'(x)(w - v), \quad w \in V.$$

Pro $w \in V$ máme $g'(w) = \varphi'(w) - \varphi'(x)$. Pak podle VĚTY 12.14. platí

$$\|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| = \|g(u) - g(v)\| \leq \sup_{w \in V} \|g'(w)\| \cdot \|u - v\|$$

$$\leq \varepsilon \|u - v\|,$$

což dokazuje (3).

Dále pro každé $u, v \in V$ platí

$$\|\varphi(u)-\varphi(v)\| \geq \frac{\eta}{2}\|u-v\|. \qquad (4)$$

Počítejme pro $u, v \in V$

$$\|\varphi(u)-\varphi(v)\| \geq -\|\varphi(u)-\varphi(v)-\varphi'(x)(u-v)\| + \|\varphi'(x)(u-v)\|$$
$$\geq -\varepsilon\|u-v\| + \eta\|u-v\| \geq \frac{\eta}{2}\|u-v\|.$$

(a) Zvolme $a, b \in \varphi'(x)(V)$. K nim nalezneme $u, v \in V$ takové, že $\varphi'(x)(u)=a$, $\varphi'(x)(v)=b$. Počítejme

$$\|\varphi(\varphi'(x)^{-1}(a)) - \varphi(\varphi'(x)^{-1}(b))\| = \|\varphi(u)-\varphi(v)\|$$

$$\leq \|\varphi(u)-\varphi(v)-\varphi'(x)(u-v)\| + \|\varphi'(x)(u-v)\|$$

$$\overset{(3)}{\leq} \varepsilon\|u-v\| + \|\varphi'(x)(u-v)\| \overset{(1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{\eta}\|\varphi'(x)(u-v)\| + \|\varphi'(x)(u-v)\|$$

$$= \frac{\varepsilon}{\eta}\|a-b\| + \|a-b\| = \left(\frac{\varepsilon}{\eta}+1\right)\|a-b\| \overset{(2)}{\leq} \beta\|a-b\|$$

(b) Zvolme $p, q \in \varphi(V)$. K nim nalezneme $u, v \in V$ takové, že $\varphi(u)=p$, $\varphi(v)=q$. Počítejme

$$\|\varphi'(x)(\varphi^{-1}(p)) - \varphi'(x)(\varphi^{-1}(q))\| = \|\varphi'(x)(u)-\varphi'(x)(v)\|$$

$$= \|\varphi'(x)(u-v)\| \leq \|\varphi(u)-\varphi(v)-\varphi'(x)(u-v)\| + \|\varphi(u)-\varphi(v)\|$$

$$\overset{(3)}{\leq} \varepsilon\|u-v\| + \|p-q\| \underset{(4)}{\overset{(4)}{\leq}} \frac{2\varepsilon}{\eta}\|\varphi(u)-\varphi(v)\| + \|p-q\| = \left(\frac{2\varepsilon}{\eta}+1\right)\|p-q\|$$

$$\overset{(2)}{\leq} \beta\|p-q\|$$

■

## LEMMA 19.10

Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\alpha > 1$. Potom existuje okolí $V$ bodu $x$ takové, že pro každou $\lambda^k$-měřitelnou $E \subset V$ platí

$$\alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \cdot d\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k(\varphi(E)) \leq \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

DŮKAZ

Nalezneme $\beta > 1$ a $\tau > 1$ taková, že

$$\beta^k \tau < \alpha. \qquad (1)$$

Nalezneme okolí $V$ bodu $x$ takové, že je splněn závěr LEMMATU 19.9 a platí

$$\forall t \in V : \tau^{-1} \operatorname{vol} \varphi'(x) \leq \operatorname{vol} \varphi'(t) \leq \tau \operatorname{vol} \varphi'(x). \qquad (2)$$

Druhá podmínka je splněna díky spojitosti zobrazení $t \mapsto \operatorname{vol} \varphi'(t)$. Nechť $E \subset V$ je $\lambda^k$-měřitelná. Potom díky (2) dostáváme

$$\tau^{-1} \operatorname{vol} \varphi'(x)\, \lambda^k(E) \leq \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \leq \tau \operatorname{vol} \varphi'(x)\, \lambda^k(E). \qquad (3)$$

LEMMA 19.8 implikuje

$$\tau^{-1} \mathcal{H}^k(\varphi'(x)(E)) \leq \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \leq \tau \mathcal{H}^k(\varphi'(x)(E)). \qquad (4)$$

Díky LEMMATU 19.9(a) dostáváme

$$\mathcal{H}^k(\varphi(E)) = \mathcal{H}^k(\varphi \circ \varphi'(x)^{-1} \circ \varphi'(x)(E)) \leq \beta^k \mathcal{H}^k(\varphi'(x)(E))$$
$$\overset{(4)}{\leq} \beta^k \tau \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \leq \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

Podobně díky LEMMATU 19.9(b) dostáváme

$$\mathcal{H}^k(\varphi(E)) \geq \beta^{-k} \mathcal{H}^k(\varphi'(x) \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(E)) = \beta^{-k} \mathcal{H}^k(\varphi'(x)(E))$$
$$\underset{(4)}{\geq} \beta^{-k} \tau^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \geq \alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

■

VĚTA 19.11 (area formule)
Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ je prosté regulární zobrazení a $f : \varphi(G) \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{H}^k$-měřitelná. Potom platí

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t),$$

pokud integrál na pravé straně konverguje.

DŮKAZ Větu dokážeme pro $f$ borelovskou. Otevřená množina $H \subset G$ je spočetným sjednocením kompaktních množin. Proto také $\varphi(H)$ je spočetným sjednocením kompaktních množin. Dostáváme tedy, že $\varphi^{-1}$ je borelovské zobrazení. Speciálně, $\varphi(G)$ je borelovská.

1. Předpokládejme, že $f = \chi_L$, kde $L \subseteq \varphi(G)$ je borelovská. Máme tedy ukázat, že

$$\mathcal{H}^k(L) = \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t). \qquad (1)$$

Zvolme $\alpha > 1$. Pro každé $y \in G$ nalezneme okolí $V_y \subseteq G$ bodu $y$ takové, že pro každou $\lambda^k$-měřitelnou $E \subseteq V_y$ platí

$$\alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k(\varphi(E)) \leq \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t). \qquad \text{(LEMMA 19.10)}$$

Platí $\bigcup \{V_y ; y \in G\} = G$. Podle VĚTY 18.4 existuje posloupnost $\{y_j\}$ taková, že $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_{y_j}$. Označme

$$A_j = \varphi^{-1}(L) \cap \left(V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_{y_i}\right).$$

Potom platí:

(a) $A_j$ je borelovská, a tedy $\lambda^k$-měřitelná,

(b) $A_j \subseteq V_{y_j}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$,

(c) $\forall j_1, j_2 \in \mathbb{N}, j_1 \neq j_2 : A_{j_1} \cap A_{j_2} = \emptyset$,

(d) $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \varphi^{-1}(L)$,

(e) $\alpha^{-1} \int_{A_j} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k(\varphi(A_j)) \leq \alpha \int_{A_j} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t)$. (2)

(f) $\varphi(A_j)$ jsou borelovské.

Z (2), (a), (c)-(e) plyne

$$\alpha^{-1} \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k(\varphi(\varphi^{-1}(L))) \leq \alpha \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

Vzhledem k tomu, že $\alpha$ bylo voleno libovolně dostáváme (1).

2. Předpokládejme, že $f$ je borelovská jednoduchá funkce, tj. $f = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{L_j}$, kde $L_j \subseteq \varphi(G)$ je borelovská, $j = 1, \dots, k$. Potom

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_{\varphi(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{L_j}(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathcal{H}^k(L_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} c_j \int_{\varphi^{-1}(L_j)} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) = \sum_{j=1}^{k} c_j \int_{G} \chi_{L_j} \circ \varphi(t) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t)$$

$$= \int_G f \circ \varphi(t) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

3. Nechť $f$ je nezáporná borelovská funkce. Nalezneme posloupnost jednoduchých borelovských funkcí $f_j : \varphi(G) \to \mathbb{R}$ takovou, že $f_j \nearrow f$ na $\varphi(G)$. Potom

$$\int_G f_j(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \xrightarrow{(\text{Levi})} \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t)$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\int_{\varphi(G)} f_j(x)\, d\mathcal{H}^k(x) \xrightarrow{(\text{Levi})} \int_G f(x)\, d\mathcal{H}^k(x).$$

5. Nechť $f$ je borelovská funkce. Potom $f = f^+ - f^-$.
Máme

$$\int_{\varphi(G)} f^+(x)\,d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f^+(\varphi(t))\,\mathrm{vol}(\varphi'(t))\,d\lambda^k(t) \in \mathbb{R},$$

$$\int_{\varphi(G)} f^-(x)\,d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f^-(\varphi(t))\,\mathrm{vol}(\varphi'(t))\,d\lambda^k(t) \in \mathbb{R}.$$

Odtud plyne

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\,d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t))\,\mathrm{vol}\,\varphi'(t)\,d\lambda^k(t).$$

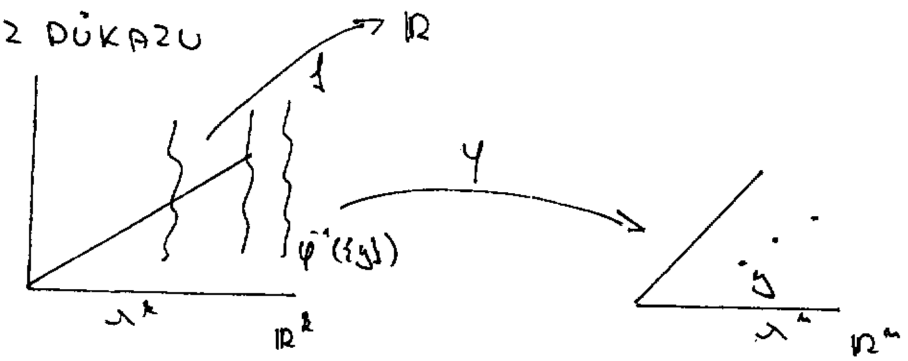
■

POZNÁMKA
Area formule platí i v případě, kdy $\varphi$ je lokálně lipschitzovské.

VĚTA 19.12 (coarea formule)
Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k > m$, $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ je lipschitzovské zobrazení, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je $\lambda^k$-integrovatelná funkce. Potom platí

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\sqrt{\det \varphi'(x)\varphi'(x)^T}\,d\lambda^k(x) = \int_{\mathbb{R}^m}\Big(\int_{\varphi^{-1}(\{y\})} f(x)\,d\mathcal{H}^{k-m}(x)\Big)\,d\lambda^m(y).$$

BEZ DŮKAZU




DŮSLEDEK 19.13
Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je $\lambda^k$-integrovatelná funkce. Potom platí

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,d\lambda^k(x) = \int_0^\infty \Big(\int_{\{x\in\mathbb{R}^k;\,\|x\|=r\}} f(x)\,d\mathcal{H}^{k-1}(x)\Big)\,d\lambda^1(r).$$

DŮKAZ

Položme $\varphi(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$. Platí

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{2}\|x\|^{-1} \cdot (2x_1, \dots, 2x_n) = -\frac{x}{\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Platí $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ pro $x, y \in \mathbb{R}^n$, a $\varphi$ je tedy lipschitzovská.

Platí

$$\varphi'(x)\varphi'(x)^T = (1)$$

Potom

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_{\mathbb{R}} \Big( \int_{\{x \in \mathbb{R}^k;\, \|x\| = r\}} f(x)\, d\mathcal{H}^{k-1}(x) \Big)\, d\lambda^1(r)$$

$$= \int_0^{\infty} \Big( \int_{\{x \in \mathbb{R}^k;\, \|x\| = r\}} f(x)\, d\mathcal{H}^{k-1}(x) \Big)\, d\lambda^1(r).$$

■

## 19.2 Plochy a jejich orientace

DEFINICE

Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$.

Řekneme, že neprázdná množina $M \subset \mathbb{R}^m$ je *k-dimenzionální plocha* (krátce *k-plocha*), jestliže pro každé $x \in M$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ takový, že $x \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v $M$.

PŘÍKLADY (důkazy na cvičení)

(1) $\{0\} \times (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha

(2) $\{x \in \mathbb{R}^m;\, \|x\| = 1\}$ je $(m-1)$-plocha

(3) nechť $H \subseteq \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $F : H \to \mathbb{R}^{m-k}$ $(k < m)$ je třídy $\mathcal{C}^1$, $\operatorname{rank} F'(x) = m-k$ pro každé $x \in H$. Je-li $M = \{x \in H;\, F(x) = 0\}$ neprázdná, potom je $M$ $k$-plocha.

DEFINICE

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$, $M$ je $k$-plocha a $x \in M$. Pak vektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazveme tečným vektorem k ploše $M$, jestliže $v=0$ nebo existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, a $\mathcal{C}^1$ zobrazení $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ takové, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma'(0) = v$. Množinu všech tečných vektorů k ploše $M$ v bodě $x$ označujeme $T_x(P)$ a nazýváme ji tečným prostorem k ploše $P$ v bodě $x$.

VĚTA 19.14

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je $k$-plocha a $x \in M$. Potom platí

(a) $T_x(M)$ je $k$-dimenzionální vektorový prostor,

(b) je-li $G \subset \mathbb{R}^k$ otevřená, $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus takový, že $x = \varphi(a) \in \varphi(G) \subseteq M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v $M$, potom $\varphi'(a)(\mathbb{R}^k) = T_x(M)$.

DŮKAZ

Stačí dokázat (b).

$\underline{\varphi'(a)(\mathbb{R}^k) \subseteq T_x(M)}$ Nechť $v = \varphi'(a)(u)$. $v \neq 0$ nalezneme $\delta > 0$ takové, že $B(a, \delta\|u\|) \subseteq G$. Potom $c : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ definujeme předpisem $c(t) = \varphi(a + tu)$, ~~kde $B(a, \delta\|u\|) \subseteq G$.~~
Potom $c$ je regulární a
$$c'(0) = \varphi'(a) \circ u = \varphi'(a)(u) = v.$$

$\underline{T_x(M) \subseteq \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)}$ Nechť $v \in T_x(M)$, $v \neq 0$. Existuje tedy regulární zobrazení $c : I \to M$ a bod $t_0 \in I$ takové, že $c(t_0) = x$, $c'(t_0) = v$.

Reprezentující matice $\varphi'(a)$ má hodnost $k$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že matice

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix} \in M(k \times k)$$

je regulární. Označme $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$.

Potom

$$(\pi\circ\varphi)'(a) = \pi'(\varphi(a))\circ\varphi'(a) = \pi\circ\varphi'(a) = A.$$

Zobrazení $\pi\circ\varphi$ je třídy $\mathcal{C}^1$ a $(\pi\circ\varphi)'(a)$ je regulární. Podle VĚTY 14.15 existuje okolí $U\subseteq G$ bodu a takové, že $\pi\circ\varphi|_U$ je difeomorfismus. Zobrazení $\pi|_{\varphi(U)}$ je prosté, neboť $\pi\circ\varphi|_U$ je prosté. Označme

$W = c^{-1}(\varphi(U))$. Množina $\varphi(U)$ je otevřená v $M$, a tedy $W$ je otevřená. Navíc $t_0\in W$. Definujme zobrazení $\xi : W \to G$ předpisem $\xi(t) = \varphi^{-1}\circ c(t)$. Platí

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \varphi^{-1}\circ(\pi|_{\varphi(U)})^{-1}\circ(\pi|_{\varphi(U)})\circ c\\ &= \underbrace{(\pi\circ\varphi|_U)^{-1}}_{\in\mathcal{C}^1(\pi(\varphi(U)))}\circ\underbrace{(\pi\circ c)}_{\in\mathcal{C}^1(W)}(t)\,, \quad t\in W.\end{aligned}$$

Zobrazení $\xi$ je tedy třídy $\mathcal{C}^1$ na $W$ a platí $c|_W = \varphi\circ\xi$. Odtud plyne

$$c'(t_0) = \varphi'(a)\cdot\xi'(t_0).$$

Máme tedy $c'(t_0)\in\varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$ ∎

DEFINICE

Nechť $M\subset\mathbb{R}^m$ je $(m-1)$-plocha. Řekneme, že $v\in\mathbb{R}^m$ je normálový vektor, jestliže $v\in T_x(M)^{\perp}$.

DEFINICE

Nechť $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 1$, $u^1,\dots,u^{m-1}\in\mathbb{R}^m$. Pak definujeme vektorový součin vektorů $u^1, u^2, \dots, u^{m-1}$ předpisem

$$u^1\times\dots\times u^{m-1} = \left(\det[e^i, u^1,\dots,u^{m-1}]\right)_{i=1}^m .$$

POZNÁMKY

(1)
$$u^1 \times \dots \times u^{n-1} = \begin{vmatrix} e^1 & u^1_1 & & u^{n-1}_1 \\ e^2 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ e^n & u^1_n & & u^{n-1}_n \end{vmatrix}$$

(2) $$u^1 \times \; = \times u^1 = \begin{vmatrix} e^1 & u^1_1 \\ e^2 & u^1_2 \end{vmatrix} = (u^1_2, -u^1_1)$$

VĚTA 19.15 (vlastnosti vektorového součinu)
Nechť $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$.

(a) Pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ platí
$$\langle v, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle = \det [v, u^1, \dots, u^{n-1}].$$

(b) Vektory $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou lineárně závislé, právě když $u^1 \times \dots \times u^{n-1} = 0$.

(c) Pro každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$ platí $\langle u^i, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle = 0$.

(d) $\| u^1 \times \dots \times u^{n-1} \| = \operatorname{vol} [u^1, \dots u^{n-1}]$.

DŮKAZ
(a)
$$\langle v, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \det (e^i, u^1, \dots, u^{n-1})$$
$$= \sum_{i=1}^n \det (v_i e^i, u^1, \dots, u^{n-1})$$
$$= \det (v, u^1, \dots, u^{n-1}).$$

(b) $\Rightarrow$ zřejmé
$\Leftarrow$ $u^1 \times \dots \times u^{n-1} = 0$ Potom matice $[v, u^1, \dots, u^{n-1}]$ je singulární pro každé $v \in \mathbb{R}^n$, a tedy $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou LZ.

(c) Plyne z (a)

(d) Označme $w = u^1 \times \dots \times u^{n-1}$. Pokud jsou $u^1, \dots, u^{n-1}$ lineárně závislé, potom $w = 0$ a $\mathrm{vol}(u^1, \dots, u^{n-1}) = 0$.

Předpokládejme tedy $w \neq 0$.

Potom platí:

$$\|w\|^4 = \langle w, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle^2 = \det [w, u^1, \dots, u^{n-1}]^2$$

$$= \det \begin{pmatrix} w \\ u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & u^1, & \dots & u^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \langle w, w \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle u^1, u^1 \rangle & \dots & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$= \|w\|^2 \cdot \det(\langle u^i, u^j \rangle) = \|w\|^2 \cdot \mathrm{vol}(u^1, \dots, u^{n-1})^2$$

$$\Rightarrow \|w\| = \mathrm{vol}(u^1, \dots, u^{n-1}).$$

■

POZNÁMKA

Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-plocha, $x \in M$ a $\varphi$ příslušný regulární homeomorfismus $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(a) = x \in \varphi(G) \subseteq M$. Potom

$$v(x) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)) \times \dots \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\varphi^{-1}(x))}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\varphi^{-1}(x))\|},$$

kde $\frac{\partial \varphi_a}{\partial x_i}(*) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(*), \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}(*)\right)$, je jednotkový normálový vektor k ploše $T_x(M)$. Zobrazení $v$ je spojité na jisté otevřené množině v $M$ obsahující $x$.

DEFINICE

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, a $M \subset \mathbb{R}^m$ je $(m-1)$-plocha. Orientací $M$ rozumíme spojité zobrazení $\nu : M \to \mathbb{R}^m$ takové, že $\nu(x) \in T_x(M)^{\perp}$ a $\|\nu(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$.

POZNÁMKA

$\nu$ ... spojité pole jednotkových normálových vektorů

PŘÍKLADY

(1) $M = \{0\} \times (0,1)^2$, $\nu(x) = (1,0,0)$, $x \in M$

(2) $M = S_2$, $\nu(x) = x$, $x \in M$

(3) möbiova páska ... neorientovatelná plocha

(4) Plochu lze orientovat více způsoby. Je-li $\nu$ orientace, je $-\nu$ také orientace.

LEMMA 19.16

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$.

(R) Nechť existují okolí bodu $z$ a rozhraničující funkce $h : U \to \mathbb{R}$ taková, že $h \in \mathcal{C}^1(U)$, $\nabla h(z) \neq 0$ a $U \cap \Omega = \{x \in U;\ h(x) < 0\}$.

Potom existuje okolí $V \subset U$ bodu $z$ takové, že $V \cap H(\Omega)$ je $(m-1)$-plocha. Vektor $\nu_{\Omega}(z) = \nabla h(z) / \|\nabla h(z)\|$ je jednotkový normálový vektor v bodě $z$ k $V \cap H(\Omega)$ a nezávisí na volbě rozhraničující funkce $h$.

DŮKAZ

$h(z) = 0$, neboť $z \notin \Omega$

nalezneme $\{z_n\}$, $z_n \in \Omega$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $z_n \to z$. Potom $h(z_n) < 0$, a tedy $h(z) \leq 0$. Máme tedy $h(z) = 0$.

BÚNO $\frac{\partial h}{\partial x_m}(x) \neq 0$ pro každé $x \in U$

Aplikujeme větu o implicitní funkci na rovnici

$$h(\underbrace{x_1, \dots, x_{m-1}}, x_m) = 0.$$

Platí

- $h(a)=0$,
- $h\in \mathcal{C}^1(U)$,
- $\frac{\partial h}{\partial x_n}(a)\neq 0$.

nalezneme okolí $W$ bodu $[a_1,\dots,a_{n-1}]$, okolí $H$ bodu $a_n$ a funkci $\varphi: W\to H$ takovou, že

- $\varphi(a_1,\dots,a_{n-1})=a_n$,
- $\varphi\in \mathcal{C}^1(W)$,
- $\{x;\ h(x)=0\}\cap(W\times H)=\operatorname{graf}\varphi$.
- $W\times H\subseteq U$.

Platí $\operatorname{graf}\varphi = H(\Omega)\cap(W\times H)$.

$\subseteq$ $\operatorname{graf}\varphi\subset W\times H$ ... zřejmé

$w=(y,\varphi(y))\notin\Omega$, neboť $h(y,\varphi(y))=0$

$h(w+t\nabla h(w))<h(w)=0$ pro $t\in(-\delta,0)$ $\Big\}\Rightarrow w\in H(\Omega)$

$\supseteq$ $w\in H(\Omega)\cap(W\times H)$

$h(w)\geq 0$, neboť $w\notin\Omega$

$h(w)\leq 0$, neboť existuje $w_n\xrightarrow[\Omega]{} w$, $h(w_n)<0$ $\Big\}\Rightarrow h(w)=0\Rightarrow w\in\operatorname{graf}\varphi$

Položme $\psi(y)=(y,\varphi(y))$, $y\in W$. Platí

- $\psi\in\mathcal{C}^1(W)$,
- $\psi(W)=\operatorname{graf}\varphi=H(\Omega)\times(W\times H)\Rightarrow\psi(W)$ je otevřená podmnožina
- $\operatorname{rank}\psi'(y)=n-1$, $y\in W$
- $\psi^{-1}(w)=\pi(w)\Rightarrow\psi$ je homeomorfismus

$\Rightarrow\psi(W)$ je $(n-1)$-plocha. Zvolme okolí $V$ bodu $a$ tak, aby $V\subset W\times H$. Potom $\psi(W)\cap V=H(\Omega)\cap V$ je $(n-1)$-plocha.

<u>ortogonalita $\nu_\Omega(a)$</u>: $h(y,\varphi(y))=0$, $y\in W$ $\qquad (y,\varphi(y))=w$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(y,\varphi(y))+\frac{\partial h}{\partial x_n}(y,\varphi(y))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(y)=\langle\nabla h(y,\varphi(y));\ \psi'(y,\varphi(y))(e^i)\rangle=0$$

$\Rightarrow\nabla h(y,\varphi(y))=\nabla h(w)\in T_w(\psi(W)\cap V)$.

- <u>jednoznačnost $v_{\Omega}(b)$</u>

$\tilde{h}$ ... rozhraničující funkce

$\left.\begin{array}{l}\nabla \tilde{h}(b) = \alpha \nabla h(b) \\ (*)\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha > 0$

DEFINICE

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $m>1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$. Řekneme, že bod $z$ je <u>regulárním bodem hranice $\Omega$</u>, jestliže existuje okolí $U$ bodu $z$ a <u>rozhraničující funkce $h$</u>: $U \to \mathbb{R}$ taková, že $h \in \mathcal{C}^1(U)$, $\nabla h(z) \neq 0$ a $U \cap \Omega = \{x \in U;\ h(x) < 0\}$. Vektor $\underbrace{\frac{\nabla h(z)}{\|\nabla h(z)\|}}_{V_\Omega(z)}$ nazýváme <u>vnější normála</u> k $\Omega$ v bodě $z$.

Množinu regulárních bodů značíme $H_*(\Omega)$.

POZNÁMKA

Pokud vektor $V_\Omega(z)$ existuje, je určen jednoznačně.

KONEC 14. PŘEDNÁŠKY, 11. 4. 2016

VĚTA 19.17

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $m>1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná omezená otevřená množina. Pokud $H_*(\Omega) \neq \emptyset$, pak $H_*(\Omega)$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem $V_\Omega$.

DŮKAZ

Plyne z LEMMATU 19.16. ∎

$V_\Omega(x)$ je definováno v každém bodě $H_*(\Omega)$

$V_\Omega(x) = \frac{\nabla h(x)}{\|\nabla h(x)\|}$ ... spojité

<u>orientace ploch dimenze 1</u>

DEFINICE

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je 1-plocha. Orientací $M$ rozumíme spojité zobrazení $\tau: M \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\tau(x) \in T_x(M)$ a $\|\tau(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$.

DEFINICE

nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(a) Řekneme, že zobrazení $c : [a, b] \to \mathbb{R}$ je (parametrická) křivka, jestliže je spojité.

(b) Řekneme, že parametrická křivka $c : [a, b] \to \mathbb{R}$ je skoro regulární, pokud existuje dělení $\{t_i\}_{i=0}^{k}$ intervalu $[a, b]$ takové, že

- $c$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, k$,
- $\forall t \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_k\} : c'(t) \neq 0$.

(c) Řekneme, že křivka $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je jednoduchá a uzavřená, jestliže $c|_{[a,b)}$ je prosté a $c(a) = c(b)$.

VĚTA 19.18 (Jordan)

nechť $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je jednoduchá uzavřená křivka. Pak existují disjunktní otevřené množiny $\mathrm{Int}\, c$ a $\mathrm{Ext}\, c$ takové, že $\mathrm{Int}\, c$ je omezená a $\mathrm{Ext}\, c$ je neomezená a platí $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Int}\, c \cup \mathrm{Ext}\, c \cup c([a, b])$. Navíc platí $H(\mathrm{Int}\, c) = H(\mathrm{Ext}\, c) = c([a, b])$.

VĚTA 19.19

nechť $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je skoro regulární jednoduchá uzavřená křivka. Potom všechny body množiny $H(\mathrm{Int}\, c)$ až na konečně mnoho jsou regulárními body $H(\mathrm{Int}\, c)$.

DŮKAZ VĚTY 19.19

Nechť $x \in H(\operatorname{Int} c)$ je takový, že existuje $\delta>0$ a $t_0 \in (a,b)$ takové, že $c(t_0)=x$, $c'$ je spojité na $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ a $c'(t_0)\neq 0$. Takový je každý bod z $H(\operatorname{Int} c)$ vyjma konečně mnoha, neboť podle Jordanovy věty máme $H(\operatorname{Int} c) = c([a,b])$ a $c$ je skoro regulární. Pro naše $x$ můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $c_1'(t_0)\neq 0$. Potom existuje okolí $U \subset (t_0-\delta,t_0+\delta)$ bodu $t_0$ takové, že $c_1$ je difeomorfismus na $U$. Označme $V = c_1(U)$. Položme $\varphi(z) = c_2\circ c_1^{-1}(z)$, $z\in V$. Potom pro každé $z\in V$ existuje $t\in U$ takové, že $c_1(t)=z$. Pak máme $[z,\varphi(z)] = [c_1(t), c_2\circ c_1^{-1}(c_1(t))] = [c_1(t), c_2(t)] = c(t)$. Máme tedy graf $\varphi \subset c(U)$. Pro $t\in U$ pak máme

$$c(t) = [\underbrace{c_1(t)}_{\in V}, c_2(t)] = [c_1(t), c_2\circ c_1^{-1}(\underbrace{c_1(t)}_{\in V})] = [c_1(t), \varphi(c_1(t))] \in \text{graf}\,\varphi.$$

Máme tedy graf $\varphi = c(U)$. Množina $F = [a,b]\setminus U$ je kompaktní a neprázdná, a tedy $c(F)$ je kompaktní. Platí $x\notin c(F)$ díky jednoduchosti a uzavřenosti $c$. Množina $c(F)$ má tedy od bodu $x = c(t_0)$ kladnou vzdálenost. Existují tedy okolí $W$ bodu $c_1(t_0)$ a okolí $H$ bodu $c_2(t_0)$ taková, že $(W\times H)\cap c(F) = \emptyset$. Platí tedy

$$(W\times H)\cap c([a,b]) = (W\times H)\cap c(U) = (W\times H)\cap \text{graf}\,\varphi.$$

Množina $P := \{[x,y]\in W\times H;\ y<\varphi(x)\}$ je otevřená a souvislá. Souvislost vyplývá z křivkové souvislosti. Podobně $N = \{[x,y]\in W\times H;\ y>\varphi(x)\}$ je otevřená a souvislá.
Poněvadž $H(\operatorname{Int} c) = H(\operatorname{Ext} c) = c([a,b])$, $(*)$ máme $P\cap(\operatorname{Int} c\cup \operatorname{Ext} c)\neq\emptyset$ a $N\cap(\operatorname{Int} c\cup \operatorname{Ext} c)\neq\emptyset$. Souvislost $P$ implikuje, že platí buď $P\subset \operatorname{Int} c$ nebo $P\subset\operatorname{Ext} c$. Podobně platí buď $N\subset \operatorname{Int} c$ nebo $N\subset \operatorname{Ext} c$.
Z $(*)$ pak plyne, že platí buď

(1) $P\subset \operatorname{Int} c$ a $N\subset \operatorname{Ext} c$,

nebo (2) $P\subset \operatorname{Ext} c$ a $N\subset \operatorname{Int} c$.

Předpokládejme, že nastane případ (1). Potom položme

$$h(u,v) = -\varphi(u)+v,\quad [u,v]\in W\times H.$$

Platí $h\in \mathcal{C}^1(W\times H)$, $\nabla h(u,v) = (-\varphi'(u),1)\neq 0$ a
$\{[u,v]\in W\times H;\ h(u,v)<0\} = P = \operatorname{Int} c\cap(W\times H)$.
Pokud nastane případ (2), pak postupujeme obdobně.

VĚTA 19.20 (Gaussova věta o divergenci)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^{n-1}(H(\Omega)) < \infty$, $\mathcal{H}^{n-1}(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = 0$ a $f$ je vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Pak platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x).$$

KONEC 15. PŘEDNÁŠKY, 13. 4. 2016

POZNÁMKA

Podle předpokladu věty musí oba integrály konvergovat.

LEMMA 19.21 (rozklad jednotky)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Pak existují funkce $\omega_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

(a) $\omega_j$ je nezáporná,
(b) $\omega_j$ je třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$,
(c) $\operatorname{diam} \operatorname{spt} \omega_j < \varepsilon$

a pro každé $x \in \mathbb{R}^n$

(d) $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(x) = 1$

(e) existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $x$ takové, že množina $\{j \in \mathbb{N};\ \operatorname{spt} \omega_j \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná.

DŮKAZ

Nechť $\eta : \mathbb{R} \to [0,1]$ je $\mathcal{C}^1$ funkce taková, že

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

např.

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), & x \in (0,1) \\ 1 \end{cases} ; \quad \eta'(x) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2}\cos\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\pi, & x \in (0,1) \\ 0 \end{cases}$$

Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2\sqrt{n}}{m} < \varepsilon$. Označme

$$\xi_k(t) = \eta\left(m\left(t - \frac{k}{m}\right)\right) - \eta\left(m\left(t - \frac{k+1}{m}\right)\right), \quad t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Platí: $\operatorname{spt} \xi_k \subset \left[\frac{k}{m}, \frac{k+2}{m}\right]$ a $\xi_k(\mathbb{R}) \subset [0,1]$. Nechť $t \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $x \in \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right)$. Potom platí

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \xi_j(t) = \xi_{k-1}(t) + \xi_k(t)$$
$$= \eta\left(m\left(t - \frac{k-1}{m}\right)\right) - \eta\left(m\left(t - \frac{k+1}{m}\right)\right) = 1 - 0 = 1$$

Pro $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m$ definujme

$$\psi_\alpha(x_1, \dots, x_m) = \varphi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \varphi_{\alpha_m}(x_m), \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

(a) $\psi_\alpha \geq 0$ ... zřejmé

(b) $\psi_\alpha \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^n)$ ... zřejmé

(c) $\operatorname{spt} \psi_\alpha \subset \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\alpha_i}{m}, \frac{\alpha_i + 2}{m}\right]$ $(*)$

$$\operatorname{diam} \operatorname{spt} \psi_\alpha \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{2}{m}\right)^2} = \frac{2\sqrt{m}}{m} < \varepsilon.$$

(d)
$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} \psi_\alpha(x) = \sum_{\alpha_1 = -\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_m = -\infty}^{\infty} \varphi_{\alpha_1}(x) \cdots \varphi_{\alpha_m}(x)$$
$$= \sum_{\alpha_1 = -\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_{m-1} = -\infty}^{\infty} \varphi_{\alpha_1}(x) \cdots \varphi_{\alpha_{m-1}}(x)$$
$$\vdots$$
$$= 1$$

(e) Plyne z $(*)$. ∎

LEMMA 19.22

Nechť $V$ je unitární prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$, $v \in V$ a $v \neq 0$. Potom existují vektory $u^1, \dots, u^n \in V$ které tvoří ortonormální bázi a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\langle v, u^i \rangle > 0$.

DŮKAZ

Máme-li unitární prostor $V$, $\dim V = 1$ a $v \in V$, $v \neq 0$. Pak zřejmě existuje příslušné $u^1$. Mějme nyní $V$ dimenze $n > 1$ a předpokládáme, že tvrzení platí pro každý unitární prostor dimenze $k$, $1 \leq k < n$. Pro $v \in V$, $v \neq 0$, nalezneme $u^1 \in V$ takové, že $\|u^1\| = 1$, $\langle v, u^1 \rangle > 0$, a $u^1 \notin \mathrm{lin}\{v\}$. Označme $W = \mathrm{lin}\{u^1\}^{\perp}$ a $w$ značí ortogonální projekci $v$ do $W$, tj. $v - \langle v, u^1 \rangle u^1$. Platí $w \neq 0$, neboť $u^1 \notin \mathrm{lin}\{v\}$. Nyní aplikujeme indukční předpoklad na $W$ a $w$. Obdržíme ON bázi $u^2, \dots, u^n$ prostoru $W$. Potom $u^1, \dots, u^n$ je ON báze $V$ a $\langle v, u^i \rangle = \langle w, u^i \rangle > 0$, $i = 2, \dots, n$. ∎

LEMMA 19.23

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $m>1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $z \in H(\Omega)$ je regulární bod hranice $\Omega$, $i \in \{1,\dots,m\}$ a $\nu(\Omega)_i > 0$. Potom existuje otevřená množina $W \subset \mathbb{R}^{m-1}$ obsahující bod $z^\vee = [z_1,\dots,z_{i-1},z_{i+1},\dots,z_m]$, otevřená množina $H \subset \mathbb{R}$ obsahující bod $z_i$ a funkce $\varphi : W \to H$ taková, že

(a) $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$

(b) $\{ x \in \mathbb{R}^m;\ [x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_m] \in W,\ x_i \in H,\ x_i < \varphi(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_m)\} =$
$= \{ x \in \Omega;\ [x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_m] \in W,\ x_i \in H \}$.

DŮKAZ

Důkaz provedeme pro $i=m$. Ostatní případy lze provést obdobně. Nechť $h : U \to \mathbb{R}$ je rozhraničující funkce, tj.

- $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená, $z \in U$,
- $h \in \mathcal{C}^1(W)$, $\frac{\partial h}{\partial x_m}(z) > 0$,
- $\{x \in U;\ h(x) < 0\} = U \cap \Omega$.

Aplikujeme větu o implicitní funkci na rovnici $h(x_1,\dots,x_{m-1},x_m) = 0$ stejně jako v důkazu LEMMATU 19.16. Nalezneme okolí $W$ bodu $z^\vee$, okolí $H$ bodu $z_m$ a funkci $\varphi : W \to H$ takovou, že

- $\varphi(z^\vee) = z_m$,
- $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$,
- $\{x;\ h(x) = 0\} \cap (W \times H) = \operatorname{graf} \varphi$,
- $W \times H \subseteq U$,
- $\frac{\partial h}{\partial x_m}(x) > 0$ pro každé $x \in W \times H$.

Dokážeme $\{[u,y] \in W\times H;\ y < \varphi(u)\} = \Omega \cap (W \times H)$. Pokud $[u,y] \in W \times H$, potom $h(u,\varphi(u)) - h(u,y) = \frac{\partial h}{\partial x_m}(u,\xi)\cdot(\varphi(u) - y)$ pro $\xi \in [\varphi(u), y]$. Poněvadž $h(u,\varphi(u)) = 0$ a $\frac{\partial h}{\partial x_m}(u,\xi) > 0$, máme $h(u,y) < 0$, právě když $y < \varphi(u)$. Platí tedy

$$\{[u,y] \in W\times H;\ y<\varphi(u)\} = \{[u,y] \in W \times H;\ h(u,y) < 0\} = (U \cap \Omega) \cap (W \times H) = \Omega \cap (W \times H).$$

■

LEMMA 19.24

Nechť $\Omega$ a $f$ jsou jako ve VĚTĚ 19.20 a $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ je lineární isometrie. Potom pro každý regulární bod $z$ hranice $\Omega$ je bod $S(z)$ regulárním bodem hranice $S(\Omega)$ a platí $\nu_{S(\Omega)}(S(z)) = S\nu_\Omega(z)$.
Dále platí

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x)\, d\lambda^m(x) = \int_{S(\Omega)} \operatorname{div}(S\circ f\circ S^{-1})(\tilde{x})\, d\lambda^m(\tilde{x}),$$

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle\, d\mathcal{H}^{m-1}(y) = \int_{H(S(\Omega))} \langle S\circ f\circ S^{-1}(\tilde{y}), \nu_{S(\Omega)}(\tilde{y})\rangle\, d\mathcal{H}^{m-1}(\tilde{y}).$$

DŮKAZ

Dokážeme $\nu_{S(\Omega)}(Sz)^T = S\nu_\Omega(z)^T$. Nechť $h$ je rozhraničující funkce pro $z$ a $\Omega$. Potom $h\circ S^{-1}$ je rozhraničující funkce pro $Sz$ a $S(\Omega)$. Platí

$$\underbrace{(h\circ S^{-1})'(\tilde{x})}_{1\times m} = \underbrace{h'(S^{-1}\tilde{x})}_{1\times m}\circ \underbrace{S^{-1}}_{m\times m} = \left(S\circ h'(S^{-1}\tilde{x})^T\right)^T = \left(S\nabla h(S^{-1}\tilde{x})^T\right)^T,$$

$S$ je isometrie $\Rightarrow S^{-1} = S^T$

a tedy

$$\nu_{S(\Omega)}(Sz) = \frac{S\nabla h(z)^T}{\|S\nabla h(z)^T\|} = S\,\frac{\nabla h(z)^T}{\|\nabla h(z)\|} = S\nu_\Omega(z)^T.$$

Počítejme

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(S\circ f\circ S^{-1})(\tilde{x}) &= \operatorname{tr}\left(S f'(S^{-1}\tilde{x}) S^{-1}\right)\\
&= \operatorname{tr}\left(S^{-1} S f'(S^{-1}\tilde{x})\right) = \operatorname{tr}\left(f'(S^{-1}\tilde{x})\right)\\
&= \operatorname{div} f\,(S^{-1}\tilde{x}).
\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\int_{S(\Omega)} \operatorname{div}(S\circ f\circ S^{-1})(\tilde{x})\, d\lambda^m(\tilde{x}) = \int_{S(\Omega)} \operatorname{div} f\,(S^{-1}\tilde{x})\, d\lambda^m(\tilde{x})$$

$$= \int_\Omega \operatorname{div} f(x)\cdot \underbrace{\operatorname{vol} S}_{=1}\, d\lambda^m(x) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x)\, d\lambda^m(x).$$

Dále

$H(S(\Omega)) = S(H(\Omega))$

$$\int_{H(S(\Omega))} \langle S\circ f\circ S^{-1}(\tilde y), \nu_{S(\Omega)}(\tilde y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(\tilde y) = \int_{S(H(\Omega))} \langle S\circ f\circ S^{-1}(\tilde y), S\,\nu_\Omega(S^{-1}\tilde y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(\tilde y)$$

$$= \int_{S(\Omega)} \langle S\circ f(y), S\,\nu_\Omega(y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_{S(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

$$\int_{S(A)} g\circ S^{-1}(\tilde y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\tilde y) = \int_A g(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$ (plyne z VĚTY 19.4(b), char. fce → jednoduchá fce → borel. fce).

■

<u>LEMMA 19.25</u>

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená množina a $z \in H_*(\Omega) \cup \Omega$. Potom existuje otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahující $z$ taková, že pro každé vektorové pole $f$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $C^1$ na otevřené množině obsahující $\bar\Omega$ a spt $f \subset U$, platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x)\, d\lambda^n(x).$$

DŮKAZ LEMMATU 19.25. Předpokládejme nejprve, že $\Omega \in \mathcal{H}_*(\Omega)$. Díky LEMMATŮM 19.24 a 19.22 můžeme předpokládat, že $\nu_\Omega(a)_i > 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Za $S$ stačí zvolit zobrazení splňující $S^{-1} e^i = u^i$, kde vektory $u^1, \dots, u^m$ tvoří ortonormální bázi a $\langle \nu_\Omega(a), u^i \rangle > 0$, $i = 1, \dots, m$.

Podle LEMMATU 19.23 nalezneme pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ množiny $W_i, H_i$ a zobrazení $\varphi_i : W_i \to H_i$. Označme

$$G_i = \{x \in \mathbb{R}^m ; [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m] \in W_i, x_i \in H_i\}, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Položme $U = \bigcap_{i=1}^m G_i$. Nechť $f$ je příslušné vektorové pole splňující $\operatorname{spt} f \subseteq U$. Ukážeme, že platí

$$\int_{H(\Omega)} f_i(y) \nu_\Omega(y)_i \, d\mathcal{H}^{m-1}(y) = \int_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \, d\lambda^m(x), \quad i = 1, \dots, m.$$

Odtud již plyne dokazovaný vztah. Zvolme opět $i = m$. Ostatní případy lze dokázat obdobně. Víme, že platí:

(1) $\{x \in W_m \times H_m ; x_m < \varphi_m(x_1, \dots, x_{m-1})\} = \Omega \cap (W_m \times H_m)$,
(2) $\operatorname{graf} \varphi_m = H(\Omega) \cap (W_m \times H_m)$
(3) $h(x_1, \dots, x_{m-1}, \varphi_m(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0$, $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in W_m$, kde $h$ je příslušná rozhraničující funkce.
(4) $\frac{\partial h}{\partial x_m}(w, \varphi_m(w)) > 0$, $w \in W_m$.

Výpočet pravé strany. Počítejme

$$\int_\Omega \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \, d\lambda^m(x) = \int_{(W_m \times \mathbb{R}) \cap \Omega} \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \, d\lambda^m(x) \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{W_m} \int_{-\infty}^{\varphi_m(w)} \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(w, t) \, dt \, d\lambda^{m-1}(w)$$

$$= \int_{W_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(w, \varphi_m(w)) \, d\lambda^{m-1}(w).$$

KONEC 19. PŘEDNÁŠKY
20. 4. 2016

Výpočet levé strany. Definujme $\psi : W_m \to \mathbb{R}^m$ předpisem

$$\psi(w) = [w, \varphi_m(w)].$$

Počítejme

$$\int_{H(\Omega)} f_n(y)\,\nu_\Omega(y)_n \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_{H(\Omega)\cap(W_n\times H_n)} f_n(y)\,\nu_\Omega(y)_n \, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

$$= \int_{W_n} f_n(\psi(w))\,\nu_\Omega(\psi(w))_n \cdot \operatorname{vol}\psi'(w)\, d\lambda^{n-1}(w) = *$$

Pro $w \in W_n$ platí

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}(w) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x_i}(\psi(w))}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}, \quad w \in W_n .$$

Potom máme

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(w)\times\dots\times\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}(w) = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & 0 & \vdots & & 1 \\ e_n & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(w) & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}(w) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{n-1}}(w) \end{vmatrix}$$

$$= \left[(-1)^{1+1}\cdot(-1)^{n-2}\cdot\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(w),\ (-1)^{1+2}(-1)^{n-3}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}(w),\ \dots,\ (-1)^{1+(n-1)}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{n-1}}(w),\ (-1)^{1+(n)}\cdot 1\right]$$

$$= (-1)^{n-1}\left[\frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(\psi(w))}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))},\ \dots,\ \frac{\frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}(\psi(w))}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))},\ 1\right] = (-1)^{n-1}\frac{1}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}\cdot\nabla h(\psi(w))$$

$$\operatorname{vol}\psi'(w) = \frac{1}{\underbrace{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}_{>0 \text{ (podle (h))}}}\cdot\|\nabla h(\psi(w))\|$$

$$* = \int_{W_n} f_n(\psi(w))\cdot\frac{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}{\|\nabla h(\psi(w))\|}\cdot\frac{1}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}\cdot\|\nabla h(\psi(w))\|\, d\lambda^{n-1}(w)$$

$$= \int_{W_n} f_n(\psi(w))\, d\lambda^{n-1}(w).$$

Predpokládejme, že $x \in \Omega$. Potom položme $U = \prod_{j=1}^{n} I_j$, kde $I_j = (a_j, b_j), j = 1, \dots, n$, a $\overline{U} \subseteq \Omega$.

Pravá strana

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x)\, d\lambda^n(x) = \int_{I_1} \dots \int_{I_n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x)\, d\lambda^n(x)$$

$$= \int_{I_1} \dots \int_{I_{j-1}} \int_{I_{j+1}} \dots \int_{I_n} 0 \, dx_1 \dots dx_{j-1} dx_j \dots dx_n = 0$$

Levá strana

$$\int_{H(\Omega)} f_j(y) \cdot \nu_{\Omega}(y)_j \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 0$$

■

LEMMA 19.26

Nechť $\Omega$ a $f$ jsou jako ve VĚTĚ 19.20 a $\operatorname{spt} f \cap (H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = \emptyset$.
Potom
$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x)\, d\lambda^n(x)$$

DŮKAZ

Označme $K = \overline{\Omega} \cap \operatorname{spt} f$. Pro každý bod $z \in K$ nalezneme podle LEMMATU 19.25 otevřenou množinu $U_z$ takovou, že

- $z \in U_z$
- pro každé vektorové pole $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ třídy $C^1$ splňující $\operatorname{spt} g \subseteq U_z$ platí
$$\int_{H(\Omega)} \langle g(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} g(x)\, d\lambda^n(x).$$

Množina $K$ je kompaktní, a proto můžeme nalézt $z^1, \dots, z^k$ takové, že $K \subseteq U_{z^1} \cup \dots \cup U_{z^k}$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in K$ existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ splňující $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{z^i}$. Funkce $x \mapsto \max\{\operatorname{dist}(x, U_{z^i}^c);\ i \in \{1, \dots, k\}\}$ je totiž spojitá a kladná na $K$. Pro toto $\varepsilon$ nalezneme rozklad jednotky $\omega_j$, $j \in \mathbb{N}$, podle LEMMATU 19.21. Označme $I = \{j \in \mathbb{N};\ \operatorname{spt} \omega_j \cap K \neq \emptyset\}$. Množina $I$ je konečná díky kompaktnosti $K$ a vlastnosti (c) z LEMMATU 19.21. Dále platí

- $\sum_{j \in I} \omega_j(x) = 1$ pro každé $x \in K$,
- pro každé $j \in I$ existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že $\operatorname{spt} \omega_j f \subseteq U_{z^i}$, a tedy
$$\int_{H(\Omega)} \langle \omega_j f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} (\omega_j f)(x)\, d\lambda^n(x).$$

Potom platí
$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_{H(\Omega)\cap K} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \sum_{j \in I} \int_{H(\Omega)} \langle \omega_j f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$
$$= \sum_{j \in I} \int_\Omega \operatorname{div} (\omega_j f)(x) \, d\lambda^n(x) = \int_\Omega \operatorname{div} (f)(x)\, d\lambda^n(x). \quad \blacksquare$$

LEMMA 19.24

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $N \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní $\mathcal{H}^{n-1}$-nulová množina. Potom existují funkce $v_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, takové, že $v_m \to \chi_{N^c}$, $\int \|\nabla v_m(x)\| \, d\lambda^n(x) \to 0$ a pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

(a) $v_m \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^n)$,

(b) existuje otevřená množina $G_m \subset \mathbb{R}^n$ obsahující $N$ taková, že $v_m|_{G_m} = 0$,

(c) $0 \le v_m(x) \le 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.

DŮKAZ

Nalezneme $\omega : \mathbb{R} \to [0,1]$ takovou, že $\omega$ je třídy $\mathcal{E}^1$ a

$$\omega(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

Označme $\eta(x) = \omega(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n$, a $c = \int \|\nabla \eta(x)\| \, d\lambda^n(x)$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Nalezneme množiny $A_j$, $j \in \mathbb{N}$, takové, že $N \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, $N \cap A_j \neq \emptyset$, $0 < \operatorname{diam} A_j < 2^{-m}$ a $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_n (\operatorname{diam} A_j)^{n-1} \le 2^{-m}$. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ nalezneme kouli $B(x_j, r_j)$ takovou, že

- $A_j \subseteq B(x_j, r_j)$,
- $r_j \le 2 \operatorname{diam} A_j$.

Množina $N$ je kompaktní, a proto existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že $N \subset \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, r_j)$. Položme

$$\eta_j(x) = \eta\left(\frac{x - x_j}{r_j}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$v_m(x) = \prod_{j=1}^{p} \eta_j(x).$$

Potom platí $\dfrac{\partial \eta_j}{\partial x_i}(x) = \dfrac{1}{r_j} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\dfrac{x - x_j}{r_j}\right)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dále máme

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}(x) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} \eta_j(x).$$

Odtud plyne

$$\left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}(x)\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}(x)\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\|\nabla\eta_j(x)\|,$$

$$\|\nabla v_m(x)\| \leq \sqrt{m}\sum_{j=1}^{n}\|\nabla\eta_j(x)\|.$$

Platí také

$$\int\|\nabla\eta_j(x)\|\,d\lambda^m(x) = \int\|\nabla\eta(y)\|\,r_j^{m-1}\,dy = c\cdot r_j^{m-1}.$$

Platí tedy

$$\int\|\nabla v_m(x)\|\,d\lambda^m(x) \leq \sqrt{m}\int\sum_{j=1}^{n}\|\nabla\eta_j(x)\|\,d\lambda^m(x)$$

$$\leq \sqrt{m}\sum_{j=1}^{n} c\cdot r_j^{m-1} \leq \sqrt{m}\sum_{j=1}^{n} c\, 2^{m-1}(\operatorname{diam} A_j)^{m-1}$$

$$\leq \sqrt{m}\cdot c\cdot 2^{m-1}\cdot\frac{1}{\alpha_m}\cdot 2^{-m}$$

Odtud plyne $\int\|\nabla v_m\| \to 0$. Položme $G_m = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r_j)$.

Pokud $\operatorname{dist}(x, N) > 2^{-m+3}$, pak $x \notin \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, 2r_j)$, a tedy $v_m(x) = 1$.

Pokud $x \in G_m$, potom $v_m(x) = 0$. Odtud plyne $v_m \to \chi_{N^c}$

vlastnosti (a)-(d) jsou snadno ověřitelné. ∎

DŮKAZ VĚTY 19.20

Označme $N = H(\Omega)\setminus H_*(\Omega)$. Množina $N$ je kompaktní a $\mathcal{H}^{m-1}(N) = 0$. Nechť $\{v_m\}$ je posloupnost funkcí z předchozího lemmatu. Položme $f^m = v_m f$. Potom $f^m$ splňuje předpoklady LEMMATU 19.26, a tedy platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f^m(y), \nu_\Omega(y)\rangle\, d\mathcal{H}^{m-1}(y) = \int_{\Omega} \operatorname{div} f^m(x)\, d\lambda^m(x).$$

Platí $f^m \to f$ $\mathcal{H}^{n-1}$ - s.v. a máme

$$\underbrace{\int_{H(\Omega)} \langle f^m(y), \nu_\Omega(y) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y)}_{} \longrightarrow \int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

$$|\ldots| \leq \|f^m(y)\| \leq \|f(y)\| \leq K \text{ na } \overline{\Omega}$$

$$\mathcal{H}^{n-1}(H(\Omega)) < \infty$$

Dále platí

$$\operatorname{div}(f^m)(x) = v_m(x) \operatorname{div} f(x) + \underbrace{\langle f(x), \nabla v_m(x) \rangle}_{}$$

$$|\qquad| \leq \|f(x)\| \cdot \|\nabla v_m(x)\| \leq K \cdot \|\nabla v_m(x)\|$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(f^m)(x) \, d\lambda^n(x) = \int_\Omega v_m(x) \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x) + \int_\Omega \langle f(x), \nabla v_m(x) \rangle \, d\lambda^n(x)$$

$$\int_\Omega v_m(x) \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x) \to \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x), \qquad \int_\Omega \langle f(x), \nabla v_m(x) \rangle \, d\lambda^n(x) \to 0$$

$v_m \to 1$ na $\Omega$
$\lambda^n(\Omega) < \infty$
$|v_m(x) \operatorname{div} f(x)| \leq 1 \cdot$ konstanta

LEMMA A.27

■

DEFINICE

(a) Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $f: U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme rotaci vektorového pole $f$ v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x).$$

(b) Nechť $U \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina a $f: U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme rotaci vektorového pole $f$ v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f = \left[ \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right].$$

KONEC 18. PŘEDN.
27.4.2016

POZNÁMKA

$$\operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} e^1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 \\ e^2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \\ e^3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \times (f_1, f_2, f_3)$$

POZNÁMKA

vektor rotace určuje osu otáčení a úhlová rychlost otáčení je rovna polovině velikosti vektoru rot f.

DEFINICE

nechť $c: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je skoro regulární křivka.

(a) nechť g je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. Křivkový integrál prvního druhu $\int_c g\,ds$ definujeme jako

$$\int_c g\,ds = \int_a^b g(c(t)) \cdot \|c'(t)\|\,dt,$$

pokud integrál vpravo existuje.

(b) nechť f je vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Křivkový integrál druhého druhu $\int_c f \cdot dc$ definujeme jako

$$\int_c f \cdot dc = \int_a^b \langle f(c(t)), c'(t) \rangle \cdot dt,$$

pokud tento integrál

POZNÁMKA

(1) Pokud je c skoro regulární a prostá křivka, g a f borelovské, pak

$$\int_c g\,ds = \int_{c([a,b])} g\,d\mathcal{H}^1, \text{ pokud integrál vlevo konverguje,}$$

$$\int_c f\,dc = \int_{c([a,b])} \langle f, \tau \rangle\,d\mathcal{H}^1, \text{ pokud integrál vlevo konverguje}$$

$$\tau(x) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}, \quad x = c(t),\ c'(t) \neq 0.$$

(2) $\int_c f\,ds$ = práce vektorového pole podél křivky c

VĚTA 19.28 (Green)

nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^1(H(\Omega)) < \infty$, $\mathcal{H}^1(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = 0$ a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které je třídy $C^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. nechť $\tau_\Omega : H_*(\Omega) \to \mathbb{R}^2$ je tečné

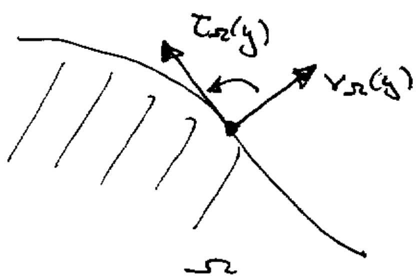
vektorové pole k $H_*(\Omega)$ definované předpisem $\tau_\Omega(y) = -X\nu_\Omega(y)$.
Pak platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \tau_\Omega(y) \rangle \, d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{rot} f(x) \, d\lambda^2(x).$$

POZNÁMKA

$\nu = (\nu_1, \nu_2) \quad X\nu = \begin{vmatrix} e^1 & \nu^1 \\ e^2 & \nu^2 \end{vmatrix} = \nu^2 e^1 - \nu^1 e^2 = (\nu^2, -\nu^1)$

$-X\nu = -(\nu_2, -\nu_1) = (-\nu_2, \nu_1)$




DŮKAZ

Definujme vektorové pole $h$ předpisem $h(x) = [f_2(x), -f_1(x)]$. Podle Gaussovy věty platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle h(y), \nu_\Omega(y) \rangle \, d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{div} h(x) \, d\lambda^2(x). \qquad (*)$$

Platí

$$\langle h(y), \nu_\Omega(y) \rangle = f_2(y)\nu_\Omega(y)_1 - f_1(y)\nu_\Omega(y)_2 = \langle f(y), \tau_\Omega(y) \rangle \quad \text{a}$$

$$\operatorname{div} h(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) = \operatorname{rot} f(x).$$

Odtud a z $(*)$ plyne dokazovaný vztah. ∎

*

VĚTA 19.29

Nechť $c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ je skoro regulární jednoduchá uzavřená křivka a $f$ je vektorové pole z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které je třídy $C^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\operatorname{int} c}$. Jestliže $\det[\nu_\Omega(c(t)), c'(t)]>0$ pro nějaké $t\in[a,b]$, pak platí

$$\int_c f\cdot dc = \int_{\operatorname{int} c} \operatorname{rot} f(x)\, d\lambda^2(x).$$

POZNÁMKA

Podmínka $\det[\nu_\Omega(c(t)), c'(t)]>0$ zaručuje kladný (= proti směru hodinových ručiček) směr obíhání.

ČÁST DŮKAZU

Zač dokázal, že $\det[\nu_\Omega(c(t)), c'(t)]>0$ v každém bodě, kde $c'(t)\neq 0$.
Podle VĚTY 19.19 a VĚTY 19.28 platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \tau_\Omega(y)\rangle\, d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{rot} f(x)\, d\lambda^2(x),$$

kde $\tau_\Omega(y) = -\times\nu_\Omega(y)$, $\Omega=\operatorname{int} c$. Víme totiž

- $\Omega$ je otevřená a omezená (VĚTA 19.18),
- $\mathcal{H}^1(H(\Omega)) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,dt < \infty$ (skoro regularita $c$),
- $\mathcal{H}^1(H(\Omega)\setminus H_*(\Omega))=0$, neboť $H(\Omega)\setminus H_*(\Omega)$ je konečná podle VĚTY 19.19.

Podle area formule (VĚTA 19.11) platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \tau_\Omega(y)\rangle\, d\mathcal{H}^1(y) = \int_a^b \langle f(c(t)), \tau_\Omega(c(t))\rangle \cdot \|c'(t)\|\,dt$$

$$\tau_\Omega(c(t)) = \pm\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

$$\underset{\shortparallel}{\langle c'(t), \times\nu_\Omega(c(t))\rangle} = \det[c'(t), \nu_\Omega(c(t))] < 0$$

$$-\langle c'(t), \tau_\Omega(c(t))\rangle = -\langle c'(t), \pm\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}\rangle \implies \tau_\Omega(c(t)) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}.$$

Potom platí

$$\int_a^b \langle f(c(t)), \tau_\Omega(c(t))\rangle \cdot \|c'(t)\|\, dt$$

$$= \int_a^b \langle f(c(t)), c'(t)\rangle\, dt = \int_c f \cdot dc.$$

DEFINICE

Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha orientovaná normálovým polem $\nu$, $\Omega \subset G$ je relativně otevřená v $G$ a $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subset G$. Řekneme, že $z \in H_G(\Omega)$ je regulárním bodem hranice $\Omega$ vzhledem ke $G$, jestliže existuje okolí $U$ bodu $z$ a funkce $h : U \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^1$ taková, že $\nu(z) \times \nabla h(z) \neq 0$ a $\{x \in G \cap U;\ h(x) < 0\} = \Omega \cap U$. V takovém bodě definujeme

$$\tau_{\Omega,\nu}(z) = \frac{\nu(z) \times \nabla h(z)}{\|\nu(z) \times \nabla h(z)\|}.$$

POZNÁMKA

Definice $\tau_{\Omega,\nu}(z)$ je korektní, protože lze ukázat nezávislost na rozhraničující funkci.

VĚTA 19.30

Nechť $G$, $\nu$ a $\Omega$ jsou jako v předchozí definici. Označme $H_G(\Omega)_*$ množinu všech regulárních bodů hranice $\Omega$ vzhledem ke $G$. Potom je $H_G(\Omega)_*$ 1-plocha a $\tau_{\Omega,\nu}$ je orientace $H_G(\Omega)_*$.

BEZ DŮKAZU

VĚTA 19.31 (Stokes)

Nechť $G$, $\nu$ a $\Omega$ jsou jako v předchozí definici. Předpokládejme dále, že $\Omega$ je omezená, $\mathcal{H}^1(H_G(\Omega)) < \infty$ a $\mathcal{H}^1(H_G(\Omega) \setminus H_G(\Omega)_*) = 0$. Nechť $f$ je vektorové pole z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^m$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Potom

$$\int_{H_G(\Omega)} \langle f(y), \tau_{\Omega,\nu}(y)\rangle\, d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \langle \operatorname{rot} f(x), \nu(x)\rangle\, d\mathcal{H}^2(x).$$

BEZ DŮKAZU

## 19.4 Hlavní věta teorie pole

VĚTA 19.32 (věta o potenciálu)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Nechť $c:[a,b] \to \Omega$ je skoro regulární křivka a $u: \Omega \to \mathbb{R}^n$ je funkce třídy $C^1$. Potom

$$u(c(b)) - u(c(a)) = \int_c \nabla u \cdot dc.$$

DŮKAZ

$$(u\circ c)(b) - u\circ c(a) = \int_a^b (u\circ c)'(t)\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(c(t))\cdot c_i'(t)\,dt$$

skoro regularita $c$
+ hladkost $u$

$$= \int_a^b \langle \nabla u(c(t)), c'(t)\rangle\,dt = \int_c \nabla u \cdot dc.$$

DEFINICE

Řekneme, že množina $U \subset \mathbb{R}^m$ je hvězdicovitá, jestliže existuje $a \in U$ takový, že pro každé $x \in U$ $\{a + t(x-a);\ t\in[0,1]\} \subset U$.

PŘÍKLAD

(1) $U$ je konvexní $\Rightarrow$ $U$ je hvězdicovitá

(2)

je hvězdicovitá

DEFINICE

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je množina, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole a $u: \Omega \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $u$ je potenciál pole $f$ na $\Omega$, jestliže pro každé $x\in\Omega$ platí $\nabla u(x) = f(x)$. Vektorové pole, které má potenciál, nazýváme potenciální.

VĚTA 19.33 (Hlavní věta teorie pole)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ je spojité vektorové pole. Uvažujme následující výroky:

(i) Vektorové pole $f$ je potenciální.

(ii) Pro každé skoro regulární křivky $c_i: [a,b] \to \Omega$, $i \in \{1,2\}$, splňující $c_1(a) = c_2(a)$, $c_1(b) = c_2(b)$ platí $\int_{c_1} f \, dc_1 = \int_{c_2} f \, dc_2$.

(iii) Pro každé $i, j \in \{1, \dots, m\}$ a $x \in \Omega$ platí $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.

Potom platí:

(a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(b) Je-li $f$ třídy $C^1$, pak (i) $\Rightarrow$ (iii).

(c) Je-li $f$ třídy $C^1$ a $\Omega$ je hvězdicovitá, pak (iii) $\Rightarrow$ (i).

DŮKAZ

(a) (i) $\Rightarrow$ (ii) Plyne z VĚTY 19.31.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Můžeme předpokládat, že $\Omega$ je neprázdná. Uvažujme komponentu $W$ množiny $\Omega$. Potom $W$ je otevřená v $\mathbb{R}^m$ (VĚTA 18.15). Zvolme $A \in W$. Dokážeme následující tvrzení.

TVRZENÍ Pro každé $x \in W$ existuje skoro regulární křivka $\psi: [0,1] \to W$ taková, že $\psi(a) = A$, $\psi(b) = x$.

DŮKAZ TVRZENÍ

Položme $G = \{x \in W;$ existuje skoro regulární $\psi: [0,1] \to W$, $\psi(0) = A$, $\psi(1) = x\}$.

$G$ je otevřená: Zvolme $x \in G$. K němu existuje příslušné $\psi$. Dále existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subseteq W$. Zvolme $y \in B(x,r)$. Potom definujme

$$\varphi(t) = \begin{cases} \psi(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x + (y-x)\,2(t - \frac{1}{2}), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Potom $\varphi$ je skoro regulární, $\varphi([0,1]) \subset W$ (díky konvexitě $B(x,r)$) a $\varphi(0) = A$, $\varphi(1) = y$. Platí tedy $y \in W$, takže $B(x,r) \subset W$, a tedy $W$ je otevřená.

$G$ je uzavřená. Mějme posloupnost $\{x_n\}$ prvků $G$ konvergující k prvku $x \in W$. Nalezneme $r>0$ takové, že $B(x,r) \subset W$. Pak existuje $n_0$ takové, že $x_{n_0} \in B(x,r)$. Pak existuje skoro regulární $\psi : [0,1] \to W$ splňující $\psi(0) = A$, $\psi(1) = x_{n_0}$. Položme

$$\varphi(t) = \begin{cases} \psi(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_{n_0} + (x - x_{n_0})2(t - \frac{1}{2}), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Potom $\varphi$ je skoro regulární, $\varphi([0,1]) \subset W$, $\varphi(0) = A$ a $\varphi(1) = x$.

Množina $W$ je souvislá, a proto $G = W$.

Pro $x \in W$ položme $u(x) = \int_\varphi f \cdot d\varphi$, kde $\varphi$ je skoro regulární křivka, $\varphi(0) = A$, $\varphi(1) = x$. Definice je korektní podle (ii) a TVRZENÍ. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in W$.

Zvolme $x \in W$. Nalezneme $r>0$ takové, že $B(x,r) \subset W$. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$. Pro $t \in (-r, r)$ platí

$$u(x + te^i) - u(x) = \int_\gamma f \, d\gamma,$$

kde $\gamma(s) = x + s \cdot t \cdot e^i$. Potom

$$\frac{u(x+te^i) - u(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^1 \langle f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle \, ds = \frac{1}{t} \int_0^1 t \cdot f_i(\gamma(s)) \, ds$$

$$= \int_0^1 f_i(\gamma(s)) \, ds = \int_0^1 f_i(x + ste^i) \, ds \longrightarrow \int_0^1 f_i(x) \, ds = f_i(x)$$

Odtud plyne $u \in \mathcal{C}^1(W)$ a $\nabla u = f$.

(b) Plyne z věty o záměně derivací (DŮSLEDEK 14.3).

(c) BÚNO: $\forall x \in \Omega\, \forall \lambda \in [0,1]: \lambda x \in \Omega$.

Položme

$$u(x) = \int_{\varphi_x} f \cdot d\varphi_x, \quad \varphi_x(\lambda) = \lambda x, \lambda \in [0,1].$$

Počítejme

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \langle f(\lambda x), x \rangle d\lambda = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} f_j(\lambda x) \cdot x_j \, d\lambda$$

$$= \int_0^1 \left( f_i(\lambda x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\lambda x) \cdot \lambda x_j \right) d\lambda .$$

Dále platí:

$$f_i(x) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \left( \lambda f_i(\lambda x) \right) d\lambda = \int_0^1 \left( f_i(\lambda x) + \lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\lambda x) \cdot x_j \right) d\lambda$$

máme tedy $\nabla u = f$. ∎

ZÁVĚREČNÁ POZNÁMKA

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(1) nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a $\Phi: G \to \mathbb{R}^n$ je třídy $\mathcal{C}^1$ $(n \geq 2)$. Potom definujeme integrál prvního druhu jako

$$\int_{\Phi} f \, dS = \int_G f(\Phi(\lambda)) \operatorname{vol} \Phi'(\lambda) \, d\lambda ,$$

pokud integrál vprovo konverguje.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

(2) nechť $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená, $\Phi: G \to \mathbb{R}^n$ je třídy $\mathcal{C}^1$. Potom definujeme integrál druhého druhu jako

$$\int_{\Phi} f \, d\Phi = \int_G \left\langle f(\Phi(\lambda)), \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} \times \dots \times \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{n-1}}(\lambda) \right\rangle d\lambda .$$