FOURIEROVY ŘADY

Rozložte ve Fourierovy řady následující funkce a určete jejich součet.

1. $f(x) = x^2,\ x \in (-\pi, \pi)$

2. $f(x) = x,\ x \in (-\pi, \pi)$

3. $f(x) = x^2,\ x \in (0, 2\pi)$

4. $f(x) = \sin^4 x,\ x \in (0, 2\pi)$

5. $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-\pi, \pi)$

6. $f(x) = \sin ax,\ x \in (-\pi, \pi)$, a necelé

7. $f(x) = |\sin x|,\ x \in (-\pi, \pi)$

8. $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in [0,1], \\ 1 & \text{pro } x \in (1,2), \\ 3-x & \text{pro } x \in [2,3]. \end{cases}$

9. Nalezněte cosinovou řadu takovou, že její součet je roven x pro $x \in (0, \pi)$.

10. Nalezněte sinovou řadu takovou, že její součet je roven x^2 pro $x \in (-\pi, 0)$.

11. Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$ jsou nulové, jestliže platí

(a) $f(x+\pi) = -f(x)$,
(b) $f(x+\pi) = f(x)$,
(c) $f(-x) = f(x)$ a $f(x+\pi) = -f(x)$.

12. V závislosti na parametru $\alpha > 0$ rozhodněte, kdy má funkce f definovaná předpisem $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, $f(0) = 0$, konečnou variaci v intervalu $[0, 1]$.

13. Napište funkci $x \mapsto \cos^{2m} x,\ x \in \mathbf{R}$, ve tvaru trigonometrického polynomu.

14. Pokud to lze, sečtěte metodou aritmetických průměrů tyto řady:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$.

VÝSLEDKY

1. $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$

3. $\frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx)$

12. Funkce má konečnou variaci, právě když $0 < \alpha \leq 1$.

14. (a) $\frac{1}{2}$ (b) Řadu nelze sečíst metodou aritmetických průměrů.