Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 1 (vzor)

ZS 2019-20

---

1. Určete, pro které hodnoty $k \in \mathbb{N}$ je následující limita vlastní a pro tyto hodnoty limitu spočtěte.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^{20}-(n+1)^{40}}{(n^k+2)^{10}-(n+1)^{30}}$$

(15 bodů)

2. Spočtěte limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^x-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

(15 bodů)

3. Spočtěte derivace i jednostranné derivace funkce f ve všech bodech, kde existují. Určete body, kde tyto derivace neexistují.

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

(15 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{1+2x}} & \text{pro } x \neq -\frac{1}{2}; \\ 0 & \text{pro } x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

(a) Rozhodněte, zda je funkce f spojitá na $\mathbb{R}$.

(b) Rozhodněte, zda existuje $f'_-(-\frac{1}{2})$. Pokud ano, určete její hodnotu.

(c) Určete obraz množiny $(-\frac{1}{2}, \infty)$ při zobrazení f.

(d) Rozhodněte, zda je funkce f na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$ konvexní.

(15 bodů)

Řešení úloh

3 b

1. Nejprve vyjádříme vhodnějším způsobem výrazy v čitateli a jmenovateli. Platí

$$\begin{aligned}(n^2+1)^{20}-(n+1)^{40} &= \big(n^{40}+20n^{38}+P_1(n)\big)-\big(n^{40}+40n^{39}+P_2(n)\big)\\ &= -40n^{39}+P_3(n),\end{aligned}$$

kde P_1, P_2, P_3 jsou polynomy splňující st $P_1 \le 36$, st $P_2 \le 38$ a st $P_3 \le 38$, a dále

4 b

$$\begin{aligned}(n^k+2)^{10}-(n+1)^{30} &= \big(n^{10k}+20n^{9k}+Q_1(n)\big)-\big(n^{30}+30n^{29}+Q_2(n)\big)\\ &= \begin{cases}-n^{30}+P_4(n), & \text{pokud } k \le 2,\\ -30n^{29}+P_5(n), & \text{pokud } k = 3,\\ n^{10k}+P_6(n), & \text{pokud } k > 3,\end{cases}\end{aligned}$$

kde Q_1, Q_2, P_4, P_5, P_6 jsou polynomy splňující st $Q_1 \le 8k$, st $Q_2 \le 28$, st $P_4 \le 29$, st $P_5 \le 28$ a st $P_6 \le 9k$.

4 b

Pak můžeme počítat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)^{20}-(n+1)^{40}}{(n^k+2)^{10}-(n+1)^{30}} = \begin{cases}\lim_{n\to\infty}\frac{-40n^{39}+P_3(n)}{-n^{30}+P_4(n)} = \infty & \text{pokud } k \le 2,\\ \lim_{n\to\infty}\frac{-40n^{39}+P_3(n)}{-30n^{29}+P_5(n)} = \infty & \text{pokud } k = 3,\\ \lim_{n\to\infty}\frac{-40n^{39}+P_3(n)}{n^{10k}+P_6(n)} = 0 & \text{pokud } k > 3.\end{cases}$$

4 b

K výpočtu prvních dvou limit jsme využili informaci ohledně stupňů polynomů P_3, P_4, P_5 a P_6. K odvození poslední rovnosti jsme využili nerovnost st $P_3 \le 38 < 10\cdot 4 \le 10k$. Limita zadané posloupnosti je tedy vlastní, právě když $k > 3$, a má hodnotu 0.

2 b

2. Funkci v čitateli, kterou označíme f, můžeme zapsat jako

$$f(x) = e^{x\log(1+x)} - \sqrt{1+x^2}, \qquad x > -1.$$

Platí $\lim_{x\to 0} x\log(1+x) = 0\cdot 0 = 0$, a tedy $\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 - 1 = 0$. Zde jsme využili spojitost funkcí $y \mapsto \log(1+y)$, $y \mapsto e^y$ a $y \mapsto \sqrt{y}$ na jejich definičních oborech.

3 b

Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = e^{x\log(1+x)}\Big(1\cdot\log(1+x) + x\cdot\frac{1}{1+x}\Big) - \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad x > -1.$$

1+1 b

Jmenovatel funkce ze zadání označíme jako g. Pak platí splňuje $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ a $g'(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

5 b Zkusme spočítat limitu

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0}\Big(e^{x\log(1+x)}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log(1+x)}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}\Big)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big)\\ &= 1\cdot\Big(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\Big)-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{1}$$

3 b Zde jsme použili větu o aritmetice limit a limitu $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$. Limita (1) tedy existuje a jsou splněny i ostatní předpoklady l'Hospitalova pravidla. Platí tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

3 b **3.** Nejprve určíme definiční obor funkce f. Definiční obor funkce arcsin je roven intervalu $[-1,1]$. Funkce f je tedy definována v bodě $x\in\mathbb{R}$ pokud platí $-1\le\frac{2x}{1+x^2}\le 1$. První nerovnost lze přepsat jako $(x+1)^2\ge 0$ a druhou jako $(x-1)^2\ge 0$. Obě nerovnosti jsou splněny pro každé $x\in\mathbb{R}$, a tedy je funkce f definována na celém $\mathbb{R}$. Zároveň vidíme, že pro každé $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ platí $-1<\frac{2x}{1+x^2}<1$.

4 b Podle věty o derivaci složené funkce můžeme pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ počítat

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\big(\frac{2x}{1+x^2}\big)^2}}\cdot\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}.\end{aligned}$$

4 b Zbývá dopočítat (jednostranné) derivace v bodech 1 a -1. Spočteme jednostranné limity derivace v bodech -1 a 1:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1_-}f'(x) &= \lim_{x\to -1_-}\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}=\lim_{x\to -1_-}\frac{-2}{1+x^2}=-1,\\ \lim_{x\to -1_+}f'(x) &= \lim_{x\to -1_+}\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}=\lim_{x\to -1_+}\frac{2}{1+x^2}=1,\\ \lim_{x\to 1_-}f'(x) &= \lim_{x\to 1_-}\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}=\lim_{x\to 1_-}\frac{2}{1+x^2}=1,\\ \lim_{x\to 1_+}f'(x) &= \lim_{x\to 1_+}\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}=\lim_{x\to 1_+}\frac{-2}{1+x^2}=-1.\end{aligned}$$

4 b Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$, takže podle Věty 5.11 a její analogie pro derivaci zleva dostáváme $f'_-(-1)=-1$, $f'_+(-1)=1$, $f'_-(1)=1$ a $f'_+(1)=-1$. Derivace v bodech -1 a 1 neexistují, neboť příslušné jednostranné derivace se nerovnají.

4. (a) Počítejme jednostranné limity v bodě $-\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}+} \frac{-x}{1+2x} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\frac{1}{2}+} e^{\frac{-x}{1+2x}} = \infty.$$

4 b

První limita je typu „$A/0$“, kde $A > 0$. Funkce $x \mapsto 1 + 2x$ je kladná pro $x > -\frac{1}{2}$. Podle Věty 3.4 dostáváme první výsledek. Druhý výsledek plyne z prvního pomocí věty o limitě složené funkce ve variantě s podmínkou (P), která je splněna, neboť $\frac{-x}{1+2x} \neq \infty$ pro každé $x > -\frac{1}{2}$. Funkce f tedy není spojitá v bodě $\frac{1}{2}$.

(b) Počítejme podle definice derivace zleva

3 b

$$\begin{aligned} f'_{-}(-\tfrac{1}{2}) &= \lim_{x \to -\frac{1}{2}-} \frac{f(x) - f(-\frac{1}{2})}{x + \frac{1}{2}} = \lim_{x \to -\frac{1}{2}-} \frac{e^{-\frac{x}{1+2x}}}{x + \frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \to -\frac{1}{2}-} \frac{\frac{1}{x+\frac{1}{2}}}{e^{\frac{x}{1+2x}}} = \lim_{x \to -\frac{1}{2}-} \frac{-\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2}}{e^{\frac{x}{1+2x}} \cdot \frac{1+2x-2x}{(1+2x)^2}} \\ &= \lim_{x \to -\frac{1}{2}-} \frac{-1}{e^{\frac{x}{1+2x}} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{-1}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili druhé l'Hospitalovo pravidlo pro dvojici funkcí $h(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$, $x < -1/2$ a $g(x) = e^{\frac{x}{1+2x}}$, $x < -\frac{1}{2}$. Ověřme splnění jeho předpokladů. Platí

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}-} \frac{x}{1+2x} = \infty \qquad \text{a} \quad \lim_{x \to -\frac{1}{2}-} e^{\frac{x}{1+2x}} = \infty.$$

2 b

První limita je typu „$A/0$“, kde $A < 0$. Funkce $x \mapsto 1 + 2x$ je záporná pro $x < -\frac{1}{2}$. Podle Věty 3.4 dostáváme první výsledek. Druhý výsledek plyne z prvního pomocí věty o limitě složené funkce ve variantě s podmínkou (P), která je splněna, neboť $\frac{x}{1+2x} \neq \infty$ pro každé $x < -\frac{1}{2}$. Derivace h a g existují vlastní pro $x < -\frac{1}{2}$ a limita $\lim_{x \to -\frac{1}{2}-} \frac{h'(x)}{g'(x)}$ existuje, jak jsme již spočítali.

(c) Platí $\lim_{x \to -\frac{1}{2}+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \to \infty} f(x) = e^{-\frac{1}{2}}$. Na intervalu $(-\frac{1}{2}, \infty)$ spočítejme derivaci funkce f:

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{1+2x}} \cdot \frac{-1}{(1+2x)^2} < 0.$$

3 b Funkce $g(x) = -\frac{x}{1+2x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, je spojitá na svém definičním oboru. Složením s exponenciální funkcí, která je spojitá na $\mathbb{R}$, dostáváme funkci f spojitou v každém bodě množiny $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. Funkce f je na intervalu $(-\frac{1}{2}, \infty)$ spojitá a vzhledem ke znaménku derivace klesající. Množina $f\big((-\frac{1}{2}, \infty)\big)$ je interval a podle předchozího platí $f\big((-\frac{1}{2}, \infty)\big) = (e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$.

3 b (d) Spočtěme druhou derivaci funkce f na intervalu $(-\frac{1}{2}, \infty)$.

$$f''(x) = e^{-\frac{x}{1+2x}} \cdot \left(\frac{1}{(1+2x)^4} - (-2) \cdot \frac{2}{(1+2x)^3}\right) = e^{-\frac{x}{1+2x}} \cdot \frac{5+8x}{(1+2x)^4}$$

Na intervalu $(-\infty, -\frac{5}{8})$ je f'' záporná a f' je zde spojitá, a proto je funkce f na tomto intervalu ryze konkávní. Funkce f tedy není na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$ konvexní.

Početní chyba bez dopadu na obtížnost úlohy .... -1 až -2 body