2. Metody důkazů

1. Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

2. (binomická věta) Pro každé $n \in \mathbf{N}$ a pro každá $a, b \in \mathbf{R}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

3. Pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ sečtěte výraz $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n}$.

4. Dokažte, že následující vztahy platí pro každé $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

5. Nechť $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$. Pak platí $\left|\sum_{i=1}^n x_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.

6. (Bernoulli) Nechť $x \in \mathbf{R}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbf{N}$. Pak platí Bernoulliova nerovnost

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

7. (Cauchy) Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$. Potom platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

8. (AG nerovnost) Nechť $a_1, \ldots, a_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

Ukažte, že rovnost v AG nerovnosti platí právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

9. Zkonstruujte funkci $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takovou, že $f(I) = \mathbf{R}$ pro každý neprázdný otevřený interval.

10. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, platí $(n+1)^n \leq n^{n+1}$.

Několik návodů

3. Použijte binomickou větu na výrazy $(1+1)^{2n}$ a $(1-1)^{2n}$. Výsledek: 2^{2n-1}. **10.** Použijte matematickou indukci nebo použijte binomickou větu na $(n+1)^n$ a pak odhadněte členy binomického rozvoje.