

18 Hilbertovy prostory

Věta 18.1. Necht' $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je unitární prostor nad tělesem \mathbb{F} reálných nebo komplexních čísel. Potom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ je norma na X .

Lemma 18.2. Necht' $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je unitární prostor nad tělesem \mathbb{F} . Na $X \times X$ uvažujme metriku

$$\rho((u, v), (u', v')) = \max\{\|u - u'\|, \|v - v'\|\}.$$

Potom je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ spojité.

Definice. Necht' X je unitární prostor nad tělesem \mathbb{F} . Pokud je X úplný vzhledem k metrice indukované normou $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, pak se nazývá **Hilbertovým prostorem**.

Definice. Necht' X je unitární prostor, Γ je indexová množina a $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ je systém prvků prostoru X .

(i) Řekneme, že indexovaný systém $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma': \langle x_\gamma, x_{\gamma'} \rangle = 0.$$

Jestliže navíc $\|x_\gamma\| = 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, potom říkáme, že je systém $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ **ortonormální**.

(ii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je **úplný**, jestliže jeho lineární obal je hustý v X .

(iii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je **maximální**, jestliže neexistuje prvek $u \in X \setminus \{0\}$ kolmý na každý vektor x_γ , $\gamma \in \Gamma$.

Věta 18.3. Necht' $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je ortogonální posloupnost v Hilbertově prostoru X .

(i) Potom řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$.

(ii) Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$, potom

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2.$$

Věta 18.4. Necht' $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků v unitárním prostoru X nad \mathbb{F} . Necht' $x = \sum_{n=1}^\infty c_n v_n$, kde $c_n \in \mathbb{F}$. Potom $c_n = \langle x, v_n \rangle / \|v_n\|^2$, $n \in \mathbb{N}$ (**Fourierův koeficient**).

Věta 18.5. Necht' X je unitární prostor, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ je ortonormální systém nenulových prvků v X , $x \in X$ a $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k $\{u_n\}_{n=1}^\infty$. Potom platí

$$\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{Besselova nerovnost}).$$

Pokud $x = \sum_{n=1}^\infty c_n u_n$, potom

$$\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 = \|x\|^2 \quad (\text{Parsevalova rovnost}).$$

Definice. Necht' X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{F} . Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z X se nazývá **(Schauderova) báze** prostoru X , jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků \mathbb{F} , pro kterou platí $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$.

Věta 18.6. Necht' X je Hilbertův prostor a $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Schauderova báze,
- (ii) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný ortogonální systém,
- (iii) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je maximální ortogonální systém.

Věta 18.7.

- (i) Necht' X je nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertův prostor. Potom v X existuje ortonormální báze.
- (ii) Necht' X_1, X_2 jsou nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertovy prostory. Potom jsou X_1 a X_2 izometricky izomorfní.

Věta 18.8. Prostor $L^2(0, 2\pi)$ se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g}$$

tvorí Hilbertův prostor. Systém $e^{i0x}, e^{ix}, e^{-ix}, e^{i2x}, e^{-i2x}, \dots$ tvoří ortonormální bázi $L^2(0, 2\pi)$.

Důsledek 18.9. Necht' $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $|f|^2$ je integrovatelná na $[0, 2\pi]$. Potom

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \quad \text{v } L^2(0, 2\pi) \quad \text{a}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Věta 18.10 (Riesz-Fischer). Necht' $c_n, n \in \mathbf{Z}$, jsou komplexní čísla splňující $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Pak existuje $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ taková, že $|f|^2$ je integrovatelná na $[0, 2\pi]$ a $\hat{f}(n) = c_n$.