17 Fourierovy řady

17.1 Základní pojmy

Definice.

- **Trigonometrickou řadou** rozumíme řadu funkcí
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$
kde $c_k \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{Z}$.

- **Trigonometrickým polynomem** rozumíme funkci tvaru
$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$
kde $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $c_k \in \mathbf{C}$, $k = -n, \dots, n$.

Lemma 17.1. *Nechť posloupnost* $\left\{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně k* f *na* $\mathbf{R}$*. Potom pro každé* $k \in \mathbf{Z}$ *platí*
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

Označení.

(i) Množinu všech 2π-periodických funkcí s hodnotami v $\mathbf{C}$, které jsou lebesgueovsky integrovatelné na intervalu $[0, 2\pi]$, budeme značit $\mathcal{P}(2\pi)$.

(ii) Pro $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ definujeme pseudonormu předpisem
$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|dx.$$

Definice (komplexní tvar Fourierovy řady)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Pak definujeme
$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Čísla $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbf{Z}$, nazýváme **komplexními Fourierovými koeficienty**. Řadu $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}$ nazýváme **komplexním tvarem Fourierovy řady funkce** f a jejím n**-tým částečným součtem** rozumíme
$$s_n^f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}, \qquad n \in \mathrm{N} \cup \{0\}.$$

Řekneme, že **součet Fourierovy řady** v bodě $x \in \mathbf{R}$ je roven $s \in \mathbf{C}$, jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = s$.

Lemma 17.2. *Nechť* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Potom*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\,dt.$$

Označení. Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a g je esenciálně omezená měřitelná 2π-periodická funkce. Potom definujeme

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Funkce $f * g$ se nazývá **konvoluce**.

17.2 Cesàrovská sčítatelnost Fourierových řad

Definice. Řekneme, že řada komplexních čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **sčítatelná Cesàrovou metodou** k číslu $\sigma \in \mathbf{C}$, jestliže platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \sigma,$$

kde $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$. Píšeme $(C)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$.

Označení.

- Pro $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ položíme

$$\sigma_n^f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} s_j^f(x).$$

- Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ položíme

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}, \qquad \text{(\textbf{Dirichletovo jádro})}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(x). \qquad \text{(\textbf{Fejérovo jádro})}$$

Lemma 17.3 (vlastnosti Dirichletova jádra)**.**

(i) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

(ii) *Funkce* D_n *je spojitá, sudá,* 2π*-periodická a* $D_n(0) = 2n+1$.

(iii) *Platí* $\int_0^{2\pi} D_n(x)\,dx = 2\pi$.

(iv) *Pro každé* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *a* $x \in \mathbf{R}$ *platí* $s_n^f(x) = f * D_n(x)$.

Lemma 17.4 (vlastnosti Fejérova jádra)**.**

(i) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2.$$

(ii) *Funkce* K_n *je spojitá, nezáporná, sudá,* 2π*-periodická a* $K_n(0) = n+1$.

(iii) *Platí* $\int_0^{2\pi} K_n(x)\,dx = 2\pi$.

(iv) *Pro každé* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *a* $x \in \mathbf{R}$ *platí* $\sigma_n^f(x) = f * K_n(x)$.

(v) *Posloupnost* $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ *konverguje lokálně stejnoměrně k nulové funkci na intervalu* $(0, 2\pi)$.

Věta 17.5 (Fejérova věta)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a* $x \in \mathbf{R}$.

(i) *Má-li* f *v bodě* x *konečné jednostranné limity* $f(x+)$, $f(x-)$, *pak*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

(ii) *Je-li* f *spojitá na intervalu* $(a,b) \subset \mathbf{R}$, *pak* $\{\sigma_n^f\}_{n=0}^{\infty}$ *konverguje lokálně stejnoměrně k* f *na* (a,b).

Důsledek 17.6. *Nechť* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *je spojitá* 2π*-periodická funkce. Potom existuje posloupnost trigonometrických polynomů* $\{P_n\}$, *která stejnoměrně konverguje k* f *na* $\mathbf{R}$.

Věta 17.7. *Nechť* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} ||f - \sigma_n^f||_1 = 0$.

Věta 17.8 (Riemann-Lebesgueovo lemma)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.

Věta 17.9 (o lokalizaci)**.** *Nechť* $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $f, g \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a* $f(t) = g(t)$ *pro každé* $t \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty}(s_n^f(x) - s_n^g(x)) = 0$.

Věta 17.10. *Nechť* $f, g \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a* $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ *pro každé* $k \in \mathbf{Z}$. *Potom* $f = g$ *s.v.*

17.3 Bodová konvergence Fourierových řad

Věta 17.11 (Hardy)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je posloupnost komplexních čísel taková, že existuje* $K \in \mathbf{R}$ *splňující* $|ka_k| \leq K$ *pro každé* $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$*. Pokud* $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbf{C}$*, potom* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$*.*

Lemma 17.12. *Pokud* f *je* 2π*-periodická funkce s konečnou variací na intervalu* $[0, 2\pi]$*, potom existuje* $K \in \mathbf{R}$ *takové, že* $|k\hat{f}(k)| \leq K$ *pro každé* $k \in \mathbf{Z}$*.*

Věta 17.13 (Jordan-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ *je funkce s konečnou variací na intervalu* $[0, 2\pi]$ *a* $x \in \mathbf{R}$*. Potom funkce* f *má v bodě* x *vlastní limitu zprava i zleva (označme je* $f(x+)$ *a* $f(x-)$*) a platí*

$$\lim_{n \to \infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

Je-li navíc f *spojitá na otevřeném intervalu* $I \subset \mathbf{R}$*, pak* $s_n^f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ *na intervalu* I*.*

Věta 17.14 (Diniho kritérium)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$*,* $x \in \mathbf{R}$*,* $s \in \mathbf{C}$ *a nechť existuje* $\delta > 0$ *takové, že integrál*

$$\int_0^{\delta} \frac{f(x+v) + f(x-v) - 2s}{v} dv$$

konverguje. Potom $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = s$*.*