16 Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

Definice. Nechť $I = [a,b] \subset \mathbf{R}$ a $f : I \to \mathbf{C}$.

- Řekneme, že funkce f je **absolutně spojitá na intervalu** $I \subset \mathbf{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, takové, že pro každý disjunktní systém intervalů $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^n$, $a_j, b_j \in I$, $j = 1, \dots, n$, platí

$$\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

  Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu I značíme $AC(I)$.

- **Variaci funkce** f **na intervalu** I definujeme předpisem

$$V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|;\ \{x_i\}_{i=0}^n \text{ je dělení } I \right\}.$$

  Řekneme, že funkce f má na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ **konečnou variaci**, jestliže $V_a^b(f) < \infty$.

Věta 16.1.

(i) *Jestliže* $f \in AC([a,b])$, *potom* $f'(x)$ *existuje s.v. v* $[a,b]$, $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$ *a*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f', \qquad x, y \in [a,b],\ x \le y.$$

(ii) *Nechť* $\varphi \in \mathcal{L}^1([a,b])$ *a* $f(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$, $x \in [a,b]$. *Potom* $f \in AC([a,b])$ *a* $f'(x) = \varphi(x)$ *s.v. v* $[a,b]$.

Věta 16.2. *Nechť* $f, g \in AC([a,b])$. *Potom*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Věta 16.3. *Nechť* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. *Platí* $f \in BV([a,b])$, *právě když existují neklesající a omezené funkce* $g, h : [a,b] \to \mathbf{R}$, *takové, že* $f = g - h$.

Věta 16.4. *Nechť* f *je monotónní na intervalu* J. *Potom* $f'(x)$ *existuje vlastní s.v. v* J.