

# 16. Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

## Definice

Nechť  $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$  a  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$ .

- Řekneme, že funkce  $f$  je **absolutně spojitá na intervalu**  $I \subset \mathbf{R}$ , jestliže pro každé  $\varepsilon \in \mathbf{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existuje  $\delta \in \mathbf{R}$ ,  $\delta > 0$ , takové, že pro každý disjunktní systém intervalů  $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^n$ ,  $a_j, b_j \in I$ ,  $j = 1, \dots, n$ , platí

$$\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu  $I$  značíme  $AC(I)$ .

- **Variaci funkce  $f$  na intervalu  $I$**  definujeme předpisem

$$V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|; \{x_i\}_{i=0}^n \text{ je dělení } I \right\}.$$

Řekneme, že funkce  $f$  má na intervalu  $I \subset \mathbf{R}$  **konečnou variaci**, jestliže  $V_a^b(f) < \infty$ .

## Věta 16.1

- (i) *Jestliže  $f \in AC([a, b])$ , potom  $f'(x)$  existuje s.v. v  $[a, b]$ ,  $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$  a*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f', \quad x, y \in [a, b], \quad x \leq y.$$

## Věta 16.1

- (i) Jestliže  $f \in AC([a, b])$ , potom  $f'(x)$  existuje s.v. v  $[a, b]$ ,  $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$  a

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f', \quad x, y \in [a, b], \quad x \leq y.$$

- (ii) Necht'  $\varphi \in \mathcal{L}^1([a, b])$  a  $f(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$ ,  $x \in [a, b]$ .  
Potom  $f \in AC([a, b])$  a  $f'(x) = \varphi(x)$  s.v. v  $[a, b]$ .

## Věta 16.2

*Necht'  $f, g \in AC([a, b])$ . Potom*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

## Věta 16.3

*Nechť  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ . Platí  $f \in BV([a, b])$ , právě když existují neklesající a omezené funkce  $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , takové, že  $f = g - h$ .*

## Věta 16.3

*Nechť  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ . Platí  $f \in BV([a, b])$ , právě když existují neklesající a omezené funkce  $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , takové, že  $f = g - h$ .*

## Věta 16.4

*Nechť  $f$  je monotónní na intervalu  $J$ . Potom  $f'(x)$  existuje vlastní s.v. v  $J$ .*