Zápočtové úlohy

1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené eventuálně uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici.

$$A_1 = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad A_2 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + e^y > 17\}.$$

2. Ukažte, že uvedená soustava určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 2, 0, 0]$ implicitně zadané funkce u, v proměnných x, y, které jsou třídy $\mathcal{C}^1$. Spočtěte parciální derivace prvního řádu těchto funkcí v bodě $[x_0, y_0] = [1, 2]$.

$$xe^{u+v} + 2uv = 1$$
$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$$

3. Nalezněte maximum a minimum funkce $f(x, y, z) = xy + yz$ na množině $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x + y + z \leq 1\}$.

4. Ukažte, že funkce $f(x, y) = (1 + e^y)\cos x - y\cos y$ má lokální maximum v nekonečně mnoha bodech a nemá lokální minimum v žádném bodě.

5. Vyšetřete (bodovou, stejnoměrnou, lokálně stejnoměrnou) konvergenci posloupnosti funkcí $\{x^n - x^{2n}\}$ na intervalu $[0, 1]$.

6. Určete oblasti konvergence, absolutní konvergence a stejnoměrné konvergence následující řady funkcí:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, 3^{2n}}{2^n} x^n\, (1 - x)^n.$$