Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2a (5)

ZS 2009-10, 12. 3. 2010

---

1. Uvažujte následující dva vztahy

$$\sin(x+y) + \sin(u+v) + u = 1 + \frac{\pi}{2}$$
$$\cos(xy) + \cos(uv) + v = 2.$$

(a) Ukažte, že vztahy definují na okolí bodu $(0, 0, \pi/2, 0)$ funkce třídy $\mathcal{C}^2$ $[x, y] \mapsto u(x, y)$ a $[x, y] \mapsto v(x, y)$, pro které platí $u(0, 0) = \pi/2$, $v(0, 0) = 0$.

(b) Ukažte, že funkce $\Phi : [x, y] \mapsto \exp(u(x, y)) + \exp(v(x, y))$ definovaná na jistém okolí bodu $[0, 0]$ nemá v bodě $[0, 0]$ lokální extrém.

(c) Uvažujte zobrazení Ψ z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$ definované na jistém okolí bodu $[1, 2, 0]$ předpisem

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = [u(\alpha\beta - \beta, \alpha\beta\gamma), u(v(\alpha - 1, \gamma), \gamma^2)].$$

Spočtěte reprezentující matici derivace zobrazení Ψ v bodě $[1, 2, 0]$.

2. Nalezněte maximum a minimum funkce f na množině M, kde

$$f(x, y, z) = e^{2xy} z,$$
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 \le \frac{1}{2}\}.$$

3. Nalezněte lokální extrémy funkce f na $\mathbb{R}^3$ v závislosti na parametru $q \in (1, \infty)$, kde

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz + 2q(x + y + z).$$

4. Nechť $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z e^{-z^2 n^2}$.

(a) Určete definiční obor reálné funkce f.

(b) Určete všechny uzavřené intervaly obsažené v $(0, +\infty)$, na kterých uvedená řada konverguje stejnoměrně.

(c) Spočtěte derivaci $f'(1)$, pokud existuje.