Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2a (4)

ZS 2009-10, 16. 2. 2010

---

1. Uvažujte následující dva vztahy

$$x^3 + y^3 + u^4 + v = 9,$$
$$x^2y^2 + u + 2v = 4.$$

(a) Ukažte, že na okolí bodu $[1, 2, 0, 0]$ určují vztahy jednoznačně funkce $[x, y] \mapsto u(x, y)$, $[x, y] \mapsto v(x, y)$, pro které platí $u(1, 2) = 0$, $v(1, 2) = 0$.

(b) Rozhodněte, zda je zobrazení

$$[x, y] \mapsto [u(x, y), v(x, y)]$$

difeomorfismus na jistém okolí bodu $[1, 2]$.

(c) Určete reprezentující matici derivace zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bodě $[1, 1, 1]$, kde

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = [u(\alpha\beta, \alpha + \gamma), \alpha u^2(\alpha^2, \beta + \gamma), v(\alpha\gamma, \beta^2 + \gamma)].$$

(15 bodů)

2. Nalezněte maximum a minimum funkce f na množině M.

$$f(x, y, z) = \sin(xy) + \sin z$$
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ x^2 + y^2 - z = 0\}$$

(15 bodů)

3. Určete, pro které hodnoty $q \in \mathbb{R}$ nabývá funkce f_q právě jednoho ostrého lokálního extrému na $\mathbb{R}^3$.

$$f_q(x, y, z) = 3y^2 + 2z(y - 1) + z^2 + 2qz(y + 1) + q^2z^2 + x(x + 2y)$$

(15 bodů)

4. Určete, na kterých intervalech následující posloupnost konverguje stejnoměrně.

$$f_n(x) = \frac{1 + nx^2}{x^2 + n}$$

(15 bodů)

Výsledky

1. (a) Položme

$$F_1(x,y,u,v) = x^3 + y^3 + u^4 + v - 9,$$
$$F_2(x,y,u,v) = x^2y^2 + u + 2v - 4.$$

Funkce F_1 a F_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$, $F_1(1,2,0,0) = F_2(1,2,0,0) = 0$ a platí

$$\left|\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(1,2,0,0)\right| = \left.\begin{vmatrix} 4u^3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right|_{[1,2,0,0]} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Ověřili jsme příslušné předpoklady věty o implicitních funkcích a dostáváme tak platnost tvrzení v (a). Označme U okolí bodu $[1,2]$, na němž jsou definovány funkce $[x,y] \mapsto u(x,y)$ a $[x,y] \mapsto v(x,y)$, které jsou třídy $\mathcal{C}^1$ na U.

(b) Pro $[x,y] \in U$ platí:

$$3x^2 + 4u(x,y)^3\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0,$$
$$2xy^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Dosadíme $x = 1$, $y = 2$, $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 0$ a dostaneme

$$3 + \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = 0,$$
$$8 + \frac{\partial u}{\partial x}(1,2) + 2\frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = 0.$$

Vyřešením lineární soustavy obdržíme

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = -2, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = -3.$$

Pro $[x,y] \in U$ dále platí:

$$3y^2 + 4u(x,y)^3\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0,$$
$$2x^2y + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + 2\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Dosadíme $x = 1$, $y = 2$, $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 0$ a dostaneme

$$12 + \frac{\partial v}{\partial y}(1,2) = 0,$$
$$4 + \frac{\partial u}{\partial y}(1,2) + 2\frac{\partial v}{\partial y}(1,2) = 0.$$

Vyřešením lineární soustavy obdržíme

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2) = 20, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(1,2) = -12.$$

Zobrazení $\psi\colon [x,y] \mapsto [u(x,y), v(x,y)]$ je na U třídy $\mathcal{C}^1$ a její derivace v bodě $[1,2]$ má reprezentující matici

$$\begin{pmatrix} -2 & 20 \\ -3 & -12 \end{pmatrix}.$$

Matice je regulární, takže ψ je difeomeorfismus na jistém okolí bodu $[1,2]$ podle Věty 12.30.

(c) Použitím řetízkového pravidla dostaneme, že na jistém okolí bodu $[1,1,1]$ platí:

$$\Phi'(\alpha,\beta,\gamma) \sim \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha\beta, \alpha+\gamma)\cdot\beta + \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha\beta,\alpha+\gamma) & \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha\beta,\alpha+\gamma)\alpha & \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha\beta,\alpha+\gamma) \\ u^2(\alpha^2,\beta+\gamma) + \alpha 2u(\alpha^2,\beta+\gamma)\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha^2,\beta+\gamma)2\alpha & \alpha 2u(\alpha^2,\beta+\gamma)\frac{\partial u}{\partial y}(\alpha^2,\beta+\gamma) & \alpha 2u(\alpha^2,\beta+\gamma)\frac{\partial u}{\partial y}(\alpha^2,\beta+\gamma) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha\gamma,\beta^2+\gamma)\gamma & \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha\gamma,\beta^2+\gamma)2\beta & \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha\gamma,\beta^2+\gamma)\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha\gamma,\beta^2+\gamma) \end{pmatrix}.$$

V bodě $[1,1,1]$ pak platí

$$\Phi'(1,1,1) \sim \begin{pmatrix} 18 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -24 & -15 \end{pmatrix}.$$

2. Označme

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-2, \\ g_2(x,y,z) &= x^2+y^2-z. \end{aligned}$$

Platí $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Množina M je díky spojitosti funkcí g_1, g_2 uzavřená. Je také omezená, neboť je obsažena v kouli o středu v počátku a poloměru $\sqrt{2}$. Spojitá funkce f nabývá tedy na množině M svého maxima i minima. Na množině M musí platit

$$x^2+y^2+z^2 = z+z^2 \le 2,$$

odtud pak $z \in [-2,1]$. Množina M má prázdný vnitřek, takže stačí pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů vyšetřit f na následujících dvou množinách:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\}, \\ M_2 &= \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty,1);\ g_2(x,y,z) = 0\}. \end{aligned}$$

a) Vyšetření množiny M_1.

Podezřelé body 1. druhu. Vektory $\nabla g_1(x,y,z) = (2x,2y,2z)$ a $\nabla g_2(x,y,z) = (2x,2y,-1)$ jsou lineárně závislé, právě když

$$z = -1/2 \ \vee\ x = y = 0.$$

První možnost vede na $x^2 + y^2 = -1/2$, což nelze. Druhá vede k $x = y = z = 0$, ale $[0,0,0] \notin M_1$. V množině M_1 tedy neexistují podezřelé body prvního druhu.

Podezřelé body 2. druhu. Řešme soustavu:

$$\cos(xy)y = \lambda 2x + \mu 2x, \tag{1}$$
$$\cos(xy)x = \lambda 2y + \mu 2y, \tag{2}$$
$$\cos z = \lambda 2z - \mu, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 = z. \tag{5}$$

Dosadíme-li do (4) za $x^2 + y^2$ vyjádření z (5) dostaneme $z + z^2 = 2$. Tato kvadratická rovnice má kořeny 1 a -2. Případ $z = -2$ je neslučitelný s (5), takže $z = 1$.

Sečtením (1) a (2) dostaneme $\cos(xy)(x+y) = 2(x+y)(\lambda+\mu)$. Odtud plyne $x+y = 0$ nebo $\cos(xy) = 2(\lambda + \mu)$. V prvním případě dostaneme za pomocí (5) $z = 2x^2$, neboli $2x^2 = 1$, tj. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ve druhém případě dosadíme za $2(\lambda + \mu)$ výraz $\cos(xy)$ do (1). Dostaneme $\cos(xy)y = \cos(xy)x$. Odtud $x = y$ nebo $\cos(xy) = 0$. První možnost implikuje $2x^2 = 1$. Pokud jde od druhou možnost, tak tato je vyloučena odhadem

$$|xy| \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Řešení soustavy (1)-(5) tedy mohou ležet pouze mezi body

$$A := \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right], \qquad B := \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right],$$
$$C := \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right], \qquad D := \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right].$$

b) Vyšetření množiny M_2.

Podezřelé body 1. druhu. Vektor $\nabla g_2(x,y,z) = (2x, 2y, -1)$ je vždy nenulový, a proto v množině M_2 neexistují podezřelé body prvního druhu.

Podezřelé body 2. druhu. Řešme soustavu:

$$\cos(xy)y = \lambda 2x, \tag{6}$$
$$\cos(xy)x = \lambda 2y, \tag{7}$$
$$\cos z = -\lambda, \tag{8}$$
$$x^2 + y^2 = z. \tag{9}$$

Sečtením rovnic (6) a (7) dostaneme $\cos(xy)(x + y) = 2\lambda(x + y)$. Opět máme dvě možnosti $x + y = 0$ nebo $\cos(xy) = 2\lambda$. První možnost po dosazení do (6) vede na $-\cos(-x^2)x = \lambda 2x$. Musí tedy být buď $x = 0$ (a tedy i $y = z = 0$) nebo $\cos(-x^2) = -2\lambda$.

Poslední vztah spolu s (8) a (9) dává vztah $\cos(2x^2) = \frac{1}{2}\cos(x^2)$. Tuto rovnici lze přepsat jako

$$2\cos^2(x^2) - \frac{1}{2}\cos(x^2) - 1 = 0.$$

Položme $t = \cos(x^2)$. Rovnice $2t^2 - \frac{1}{2}t - 1 = 0$ má kořeny $t_1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{33}$ a $t_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{33}$. Musí být $2x^2 = z < 1$, takže $\cos(2x^2) > 0$, a tedy $\cos(x^2) > 0$. Řešení t_2 tedy můžeme vyloučit. Odtud $x = \pm\sqrt{\arccos(t_1)}$.

Zbývá ještě možnost, že $\cos(xy) = 2\lambda$. Potom z (6) máme $\lambda = 0$ nebo $x = y$. Pokud $\lambda = 0$, dostaneme z (8) $|z| \geq \pi/2 > 1$, zatímco případné řešení musí splňovat $0 \leq z < 1$. Pokud $x = y$, potom dostáváme rovnici $\cos(2x^2) = -\frac{1}{2}\cos(x^2)$. Tuto rovnici lze přepsat jako

$$2\cos^2(x^2) + \frac{1}{2}\cos(x^2) - 1 = 0.$$

Položme $t = \cos(x^2)$. Rovnice $2t^2 + \frac{1}{2}t - 1 = 0$ má kořeny $t_3 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{33}$ a $t_4 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{33}$. Musí být $2x^2 = z < 1$, takže $\cos(2x^2) > 0$, a tedy $\cos(x^2) < 0$. Případ t_3 tedy můžeme vyloučit. Má-li platit $\cos(x^2) = t_4$, pak musí být $x^2 > \pi/2 > 1/2 > x^2$, což nelze.

Řešení soustavy (6)-(9) tedy mohou ležet pouze mezi body

$$\begin{aligned}
E &:= [0, 0, 0],\\
F &:= [\sqrt{\arccos(t_1)}, -\sqrt{\arccos(t_1)}, 2\arccos(t_1)],\\
G &:= [-\sqrt{\arccos(t_1)}, \sqrt{\arccos(t_1)}, 2\arccos(t_1)].
\end{aligned}$$

Pro hodnoty ve výše uvedených bodech platí:

$$\begin{aligned}
f(A) = f(D) &= \sin\frac{1}{2} + \sin 1,\\
f(B) = f(C) &= -\sin\frac{1}{2} + \sin 1,\\
f(E) &= 0,\\
f(G) = f(F) &= -\sin(\arccos t_1) + \sin(2\arccos t_1) = \sin(\arccos t_1)(2\cos(\arccos t_1) - 1)\\
&= \sin(\arccos t_1)(2t_1 - 1) > 0.
\end{aligned}$$

Maximální hodnoty f mezi body A, B, C, D, E se nabývá v bodech A a D a minimální v bodě E. Tyto body leží v množině M (narozdíl od bodů F a G, jak lze ukázat), takže minimum funkce f na množině M je v bodě E a maximum v bodech A a D.

3. Funkce f_q je třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Pro derivace prvního řádu platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_q}{\partial x}(x,y,z) &= 2x+2y,\\ \frac{\partial f_q}{\partial y}(x,y,z) &= 6y+2z+2qz+2x,\\ \frac{\partial f_q}{\partial z}(x,y,z) &= 2(y-1)+2z+2qy+2q+2q^2z.\end{aligned}$$

Vyřešíme soustavu

$$\begin{aligned}2x+2y&=0,\\ 6y+2z+2qz+2x&=0,\\ 2(y-1)+2z+2qy+2q+2q^2z&=0.\end{aligned}$$

Pro $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ platí

$$x = -\frac{1+q}{q-1},\quad y = \frac{1+q}{q-1},\quad z = -\frac{2}{q-1}.$$

Pro $q = 1$ je řešením trojice $[-y, y, -y],\ y \in \mathbb{R}$. Hessova matice má pro libovolné $[x, y, z]$ tvar

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 6 & 2+2q\\ 0 & 2+2q & 2+2q^2\end{pmatrix}.$$

Platí

$$\left|2\right| = 2 > 0,\quad \begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix} = 8 > 0,\quad \begin{vmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 6 & 2+q\\ 0 & 2+2q & 2+2q^2\end{vmatrix} = 8(q-1)^2.$$

Pro $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ tedy existuje právě jeden lokální extrém. Pro $q = 1$ je funkce f_1 na přímce $\{[-y, y, -y];\ y \in \mathbb{R}\}$ konstantní, takže pro $q = 1$ nemá funkce právě jeden extrém.

4. Každá z funkcí f_n má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+nx^2}{x^2+n} = x^2.$$

Platí

$$\lim_{x\to\infty}|f_n(x)-x^2| = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{1-x^4}{x^2+n}\right| = +\infty.$$

To znamená, že $\sup\{|f_n(x)-x^2|;\ x \in \mathbb{R}\} = +\infty$ a funkce nekonvergují stejnoměrně.

Nechť $K \in \mathbb{R}$. Potom pro $x \in [-K, K]$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|f_q(x)-x^2| \le \frac{K^4+1}{n}.$$

Odtud plyne, že na intervalu $[-K, K]$ konverguje posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně. Platí tedy, že $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém omezeném intervalu.