Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2a (3)

ZS 2009-10, 9. 2. 2010

---

1. Ukažte, že následující dva vztahy

$$e^{pq}(a+b) + e^{p-q}(a-b) - p - b = 0$$
$$\log(1+pq)(a^4 + ab + b^4) - q - a = 0$$

definují na okolí bodu $(0,0)$ hladké funkce $a(p,q)$, $b(p,q)$, pro které platí $a(0,0) = 0$, $b(0,0) = 0$. Určete reprezentující matici derivace zobrazení $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bodě $[0,0,2]$, kde

$$\Phi\colon [p,q,z] \mapsto [a(pz,qz), a(p,q)\cdot b(p,q), z + a(p,q)]. \qquad \text{(15 bodů)}$$

2. Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = x+2y+4z, \quad M = \{[x,y,z]) \in \mathbb{R}^3;\ y+z < 2,\ x^2+y^2+z^2 \le 4\} \quad \text{(15 bodů)}$$

3. Najděte všechny lokální extrémy funkce f na $\mathbb{R}^3$ a rozhodněte o existenci globálních extrémů.

$$f(x,y,z) = 2y - y\cos^2 x - 3y\cos x \cdot \sin x + \cos^2 z. \qquad \text{(15 bodů)}$$

4. Určete definiční obor a obor spojitosti funkce f definované předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2(1+nx^2)}. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Spočtěte $f'(0)$, pokud existuje.

Výsledky

1. $\frac{\partial a}{\partial p}(0,0) = 0,\ \frac{\partial b}{\partial p}(0,0) = -1,\ \frac{\partial a}{\partial q}(0,0) = -1,\ \frac{\partial b}{\partial q}(0,0) = -2,$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Vzhledem ke spojitosti funkce f vyjde supremum a infimum funkce f na M stejně jako na $\overline{M}$. Platí

$$\overline{M} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ y + z \leq 2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Postupně je třeba vyšetřit:

- vnitřek $\overline{M}$,
- část hranice $\overline{M}$, kde $y + z = 2$,
- část hranice $\overline{M}$, kde $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, a konečně
- část hranice $\overline{M}$, kde $y + z = 2$ a zároveň $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Bod maxima: $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}, 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$; bod minima: $\left[\frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{-4}{\sqrt{21}}, \frac{-8}{\sqrt{21}}\right]$.

3. Funkce nemá globální ani lokální extrémy.

4. Ověříme konvergenci zadané řady v bodě 0 a ukážeme, že formálně zderivovaná řada konverguje podle Weierstrassova kritéria; $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.