Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2a (2)

ZS 2009-10, 2. 2. 2010

---

1. Mějme následující dva vztahy

$$\sin x + \sin y + \sin u + \sin(2v) = 0,$$
$$u\cos x + v\cos y + \cos u + \cos v = 2.$$

(a) Ukažte, že vztahy definují na okolí bodu $(0,0)$ funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ třídy $\mathcal{C}^2$, pro které platí $u(0,0) = 0$, $v(0,0) = 0$.

(b) Určete reprezentující matici derivace zobrazení

$$\Phi\colon [x,y,z] \mapsto [u(x,y), zu(x,y), u(x,y)v(x,y), xyz]$$

v bodě $(0,0,1)$.

(c) Spočtěte $D_{\boldsymbol{h}}u(0,0)$, kde $\boldsymbol{h} = (3,4)$.

2. Určete minimální R (pokud existuje) takové, že pro množinu E, kde

$$E = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 1,\ x > 0, y > 0\},$$

platí $E \subset \overline{B}([0,0,0], R)$.

3. Najděte všechny lokální extrémy funkce f na $\mathbb{R}^3$ a rozhodněte o existenci globálních extrémů.

$$f(x,y,z) = \exp(x^2)\cos(y) + \exp(x^2)\cos(z)$$

4. Určete, na kterých intervalech následující řada konverguje stejnoměrně.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\left(1 + \frac{nx^2}{1 + n^7x^6}\right)$$

Výsledky

1. (b) Reprezentující matice má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $D_{\boldsymbol{h}}u(0,0) = 7$

2. Je třeba maximalizovat funkci $[x, y, z] \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ na množině E. Výsledek $R = \sqrt{2}$.

3. Body, kde $\nabla f(x, y, z) = [0, 0, 0]$: $[0, k\pi, l\pi], k, l \in \mathbb{Z}$, $[x, k\pi, l\pi]$, $x \in \mathbb{R}$ a $k, l \in \mathbb{Z}$ nemají stejnou paritu. Ve všech těchto bodech je Hessova matice indefinitní, a tedy f nemá lokální extrém v žádném bodě. Nemá tedy ani globální extrémy.

4. Pomocí Weierstrassova kritéria lze odvodit, že řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.