Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2a (1)

ZS 2009-10, 26. 1. 2010

1. Ukažte, že následující dva vztahy

$$x^u - yu - u = 0$$
$$\operatorname{arctg}(xv) + \sin(x - y - u) = 2y$$

definují na okolí bodu $(1, 0)$ hladké funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$, pro které platí $u(1, 0) = 1$, $v(1, 0) = 0$ a vypočtěte totální diferenciál zobrazení

$$\Phi\colon [x, y] \mapsto [u(x, y) - v(x, y), u(x, y) + v(x, y)]$$

v bodě $(1, 0)$. (15 bodů)

2. Nechť $A = [0, 16]$, $B = [8, 0]$. Nalezněte takové $C \in M$, kde

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ 4x^4 + y^2 - 4x^2 = 0\},$$

pro které má trojúhelník ABC největší obsah. (15 bodů)

3. Najděte všechny lokální extrémy funkce f na $\mathbb{R}^3$, kde

$$f(x, y, z) = (yz)^2 + yz + (y - x)^2 + (z - x)^2. \qquad \text{(15 bodů)}$$

4. Rozhodněte o lokálně stejnoměrné konvergenci a stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ na $\mathbb{R}$, kde

$$f_n(x) = \exp\left(\frac{|x| - n}{|x| + n}\right) + \exp\left(-\frac{|x| - n}{|x| + n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Výsledky

1. Reprezentující matice má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $[-\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2]$

3. Ostré lokální minimum v bodě $[0, 0, 0]$.

4. Posloupnost konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$, ale ne stejnoměrně.