Bonusová úloha číslo 4

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce taková, že pro každé $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, platí $\lim_{n\to\infty} f(n\theta) = 0$. Potom $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Řešení. Tvrzení platí a dokážeme ho sporem. Předpokládejme že pro každé $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, platí $\lim_{n\to\infty} f(n\theta) = 0$, ale není pravda, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Existuje tedy $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}, x > x_0 :\ |f(x)| > \varepsilon. \tag{1}$$

Položme $G = \{z \in (0, +\infty);\ |f(z)| > \varepsilon\}$. Podle (1) je G neomezená a ze spojitosti f dostáváme její otevřenost. Položme

$$P_n = \{\theta \in (0, 1);\ \exists m \in \mathbb{N},\ m \geq n :\ m\theta \in G\}.$$

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Množina $\{\theta \in (0, 1);\ m\theta \in G\}$ je otevřená, neboť G je otevřená a $\theta \mapsto m\theta$ je spojitá funkce. Odtud plyne, že P_n je otevřená neboť

$$P_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} \{\theta \in (0, 1); m\theta \in G\}.$$

Nyní ukážeme, že množina P_n je hustá v $[0, 1]$. Zvolme $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\alpha < \beta$. Potom pro $j_0 \in \mathbb{N}$, které splňuje $j_0 \geq n$ a $j_0 > \alpha/(\beta - \alpha)$ máme $\bigcup_{j=j_0}^{\infty}(j\alpha, j\beta) = (j_0\alpha, +\infty)$. Platí $(j_0\alpha, +\infty) \cap G \neq \emptyset$, a tedy existují $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$ a $z \in (j\alpha, j\beta) \cap G$. Potom $\frac{1}{j}z \in P_n \cap (\alpha, \beta)$.

Každá množina $[0, 1] \setminus P_n$, $n \in \mathbb{N}$, je tedy řídká. Interval $[0, 1]$ je úplný metrický prostor, a proto podle Baireovy věty $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \emptyset$. Pro $\theta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$, potom máme

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}, m \geq n :\ m\theta \in G,$$

neboli

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}, m \geq n :\ |f(m\theta)| > \varepsilon.$$

Neplatí tedy $\lim_{n\to\infty} f(n\theta) = 0$, což je spor.