# Bonusová úloha číslo 3

Rozhodněte, zda existuje posloupnost spojitých reálných funkcí $\{f_n\}$ definovaných na $\mathbb{R}$, která konverguje bodově k nulové funkci, ale na žádném netriviálním otevřeném intervalu nekonverguje stejnoměrně.

*Řešení.* Zkonstruujeme posloupnost funkcí s uvedenými vlastnostmi. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme funkci $g_n\colon \langle 0,1) \to \langle 0,1\rangle$ jako

$$g_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2n}), \\ 2 - 2nx & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{2n}, \frac{1}{n}), \\ 0 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{n}, 1), \end{cases}$$

a rozšiřme ji 1-periodicky na celou reálnou osu. Funkce $g_n$ je zjevně spojitá. Všimněme si, že posloupnost $\{g_n\}$ má následující vlastnost:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\colon g_n(x) = 0. \tag{1}$$

Dále definujme

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} g_n(2^k x).$$

Řada konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$, funkce $f_n$ jsou tedy spojité na $\mathbb{R}$.

Ukažme, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje bodově k nulové funkci. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $K \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Z vlastnosti (1) plyne, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_1$ a všechna $k = 0, \dots, K$ platí $g_n(2^k x) = 0$. Pro každé $n \geq n_1$ tedy máme

$$|f_n(x)| = \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} g_n(2^k x) \right| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Nechť nyní $I \subset \mathbb{R}$ je libovolný netriviální interval. Pak existují $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ taková, že bod $\frac{p}{2^q}$ leží ve vnitřku intervalu $I$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$f_n\left(\frac{p}{2^q} + \frac{1}{2n2^q}\right) \geq \frac{1}{2^q} g_n\left(p + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2^q}$$

a nepochybně existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_2$ leží body tvaru $\frac{p}{2^q} + \frac{1}{2n2^q}$ uvnitř intervalu $I$. Posloupnost $\{f_n\}$ tedy nekonverguje stejnoměrně na $I$.