Bonusová úloha číslo 2

Nalezněte všechny hromadné body posloupnosti

$$a_n = \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!}}{\sin 1} \right)^{(2n+1)!}.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$c_n = (2n+1)! \left(- \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!}}{\sin 1} \right).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!} > 0$, neboť se jedná o částečný součet alternující řady, kde první člen je kladný a posloupnost absolutních hodnot jednotlivých členů je klesající. Odtud a použitím vztahu $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!} = \sin 1$ dostaneme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\log a_n = (2n+1)! \cdot \log \left(1 + \frac{c_n}{(2n+1)!} \right). \tag{1}$$

Označme

$$d_n = \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}(2n+1)!}{(2j-1)!}.$$

Potom máme

$$c_n = \frac{-1}{\sin 1} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}(2n+1)!}{(2j-1)!} = \frac{-1}{\sin 1} \left((-1)^n + d_n \right).$$

Pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq n+2$, platí

$$\left| \frac{(-1)^{j-1}(2n+1)!}{(2j-1)!} \right| \leq \left(\frac{1}{2n+2} \right)^{j-(n+1)}.$$

Odtud pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme

$$|d_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+2} \right)^k = \frac{1}{2n+1}.$$

Platí tedy $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$. Množina hromadných hodnot posloupnosti $\{(-1)^n\}$ je rovna $\{-1, 1\}$ a nyní s pomocí výše uvedeného není obtížné odvodit, že $H(\{c_n\}) = \{-1/\sin 1, 1/\sin 1\}$. Dále máme $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{(2n+1)!} = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $c_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Odtud a z (1) pomocí standardních postupů plyne

$$H(\{a_n\}) = \{\exp(-1/\sin 1), \exp(1/\sin 1)\}.$$