Bonusová úloha číslo 1

Nechť f je reálná funkce taková, že kdykoliv $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada reálných čísel, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ je také konvergentní řada. Dokažte, že f má v 0 vlastní derivaci.

Důkaz. Je ihned vidět, že $f(0) = 0$. Stačí tedy dokázat, že existuje vlastní $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Pokud limita $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ neexistuje, můžeme bez újmy na obecnosti (pomocí případného přechodu k $-f$ či $f(-x)$) předpokládat, že existují $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$ taková, že $\limsup_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} > a > b > \liminf_{x\to 0-} \frac{f(x)}{x}$. Můžeme tedy nalézt posloupnosti $\{x_k\} \subset (0, +\infty)$ a $\{y_k\} \subset (-\infty, 0)$ splňující $\lim x_k = \lim y_k = 0$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$f(x_k) > a x_k \quad \text{a} \quad f(y_k) > b y_k. \tag{1}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ zvolme $N_k \in \mathbb{N}$ takové, aby $N_k(a - b)x_k \geq 1$, a dále pro $j = 1, \ldots, N_k$ najděme $y_j^k \in \{y_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ splňující $|y_j^k| < \frac{1}{2^j}\frac{1}{2^k}$. Dále označme $M_j^k = \left[\frac{x_k}{-y_j^k}\right]$ a všimněme si, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $j = 1, \ldots, N_k$ platí

$$0 \leq x_k + M_j^k y_j^k < \frac{1}{2^j}\frac{1}{2^k}. \tag{2}$$

Nyní zkonstruujeme posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takto:

$$x_1, \underbrace{y_1^1, \ldots, y_1^1}_{M_1^1\text{-krát}}, x_1, \underbrace{y_2^1, \ldots, y_2^1}_{M_2^1\text{-krát}}, \ldots, x_1, \underbrace{y_{N_1}^1, \ldots, y_{N_1}^1}_{M_{N_1}^1\text{-krát}},$$
$$x_2, \underbrace{y_1^2, \ldots, y_1^2}_{M_1^2\text{-krát}}, \ldots, x_2, \underbrace{y_{N_2}^2, \ldots, y_{N_2}^2}_{M_{N_2}^2\text{-krát}}, \ldots$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. To lze nahlédnout například takto: Definujme posloupnost b_1, b_2, $b_3, \ldots$ jako

$$x_1 + M_1^1 y_1^1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{M_1^1\text{-krát}}, \ldots, x_1 + M_{N_1}^1 y_{N_1}^1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{M_{N_1}^1\text{-krát}},$$
$$x_2 + M_1^2 y_1^2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{M_1^2\text{-krát}}, \ldots, x_2 + M_{N_2}^2 y_{N_2}^2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{M_{N_2}^2\text{-krát}}, \ldots$$

Označme s_n částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a t_n částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Z (2) plyne, že posloupnost $\{t_n\}$ je neklesající a shora omezená, má tedy vlastní limitu. Posloupnost $\{s_n - t_n\}$ je ovšem nezáporná a je shora majorizována posloupností skládající se z bloků posloupnosti $\{x_k\}$, jež má limitu 0. Platí tedy $\lim(s_n - t_n) = 0$.

Konečně, z (1) plyne

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_k}\big(f(x_k) + M_j^k f(y_j^k)\big) \geq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_k}(a x_k + b M_j^k y_j^k)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_k}\big((a-b)x_k + b(x_k + M_j^k y_j^k)\big) \geq \sum_{k=1}^{\infty} N_k(a-b)x_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty,\end{aligned}$$

což je spor s předpokladem.

Dokázali jsme tedy existenci $f'(0)$. Nyní předpokládejme, že $f'(0)$ je nevlastní. Bez újmy na obecnosti nechť $f'(0) = +\infty$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\delta_n > 0$ takové, že $\frac{f(x)}{x} > n$ pro $x \in (0, \delta_n)$. Zvolme $x_n \in (0, \delta_n)$ takové, že $x_n < 1/n^2$ a položme $K_n = \left[\frac{2}{n^2 x_n}\right]$. Všimněme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{n^2} < K_n x_n \leq \frac{2}{n^2}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} K_n x_n$ je tedy konvergentní, ale

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n f(x_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} K_n n x_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

což je spor s předpokladem. $\square$