14 Metrické prostory II

14.1 Úplné metrické prostory

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $\rho_M := \rho|_{M \times M}$. Metrický prostor (M, ρ_M) nazýváme **podprostorem** prostoru (X, ρ).

Věta 14.1. *Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$. Množina $G \subset M$ je otevřená v (M, ρ_M), právě když existuje otevřená množina H v (X, ρ) taková, že $G = M \cap H$.*

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z X. Řekneme, že $\{x_n\}$ je **cauchyovská**, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n, m \in \mathbf{N}, n, m \geq n_0 : \; \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definice. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků z X je konvergentní v (X, ρ).

Věta 14.2. *Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$.*

(i) *Je-li (M, ρ) úplný prostor, pak M je uzavřená množina v (X, ρ).*

(ii) *Nechť (X, ρ) je úplný. Pak prostor (M, ρ) je úplný, právě když M je uzavřená v (X, ρ).*

Věta 14.3. *Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin X splňující*

- $\forall n \in \mathbf{N} : \; F_{n+1} \subset F_n$,
- $\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} F_n = 0$.

Potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ je jednobodová množina.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$. Řekneme, že M je v prostoru (X, ρ)

- **hustá**, jestliže $\overline{M} = X$,
- **řídká**, jestliže $X \setminus \overline{M}$ je hustá,
- **1. kategorie**, jestliže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde M_n jsou řídké v (X, ρ),
- **2. kategorie**, jestliže M není 1. kategorie,
- **residuální**, jestliže $X \setminus M$ je 1. kategorie.

Věta 14.4 (Baire)**.** *Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $G \subset X$ je otevřená a neprázdná. Pak G je 2. kategorie v (X, ρ).*

Definice.

(i) Nechť X je množina a $f: X \to X$. Řekneme, že $x \in X$ je **pevným bodem** zobrazení f, jestliže $f(x) = x$.

(ii) Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $f: X \to X$ je **kontrakce**, jestliže existuje $q \in [0, 1)$ takové, že platí

$$\forall x, y \in X: \ \rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y).$$

Věta 14.5 (Banachova věta o kontrakci)**.** *Nechť (X, ρ) je úplný neprázdný metrický prostor a $f: X \to X$ je kontrakce. Pak f má právě jeden pevný bod.*

14.2 Separabilní metrické prostory

Definice. Metrický prostor se nazývá **separabilní**, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\mathcal{B}$ je systém otevřených podmnožin (X, ρ). Řekneme, že $\mathcal{B}$ je **báze otevřených množin**, jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset X$ existuje $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ takové, že $\bigcup \mathcal{B}^* = G$.

Věta 14.6. *Metrický prostor (X, ρ) je separabilní, právě když existuje spočetná báze otevřených množin v prostoru (X, ρ).*

Důsledek 14.7. *Podprostor separabilního metrického prostoru je separabilní.*

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Řekneme, že $M \subset X$ je **ε-síť v** X, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje bod $y \in M$ takový, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Definice. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá **totálně omezený**, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, existuje konečná ε-síť. Množina $Y \subset X$ se nazývá **totálně omezená**, jestliže podprostor (Y, ρ) je totálně omezený.

Věta 14.8. *Nechť (X, ρ) je totálně omezený metrický prostor. Pak platí:*

(i) *prostor (X, ρ) je omezený,*

(ii) *prostor (X, ρ) je separabilní,*

(iii) *každá množina $Y \subset X$ je totálně omezená.*

14.3 Kompaktní metrické prostory

Věta 14.9. *Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní, právě když je úplný a totálně omezený.*

Důsledek 14.10. *Kompaktní metrický prostor je separabilní.*

Věta 14.11. *Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *Prostor (X, ρ) je kompaktní.*

(ii) *Pro každý systém $\mathcal{G}$ otevřených množin v (X, ρ), který splňuje $X = \bigcup \mathcal{G}$, existuje konečný systém $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ splňující $X = \bigcup \mathcal{G}^*$.*

(iii) *Pro libovolnou posloupnost $\{F_n\}$ neprázdných uzavřených množin v (X, ρ) splňující $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*

Věta 14.12. *Nechť (X, ρ) je kompaktní metrický prostor, (Y, σ) je metrický prostor a $f : X \to Y$ je spojité. Potom $f(X)$ je kompaktní.*

Věta 14.13. *Nechť (X, ρ) je kompaktní metrický prostor, (Y, σ) je metrický prostor a $f : X \to Y$ je spojitá bijekce. Potom f je homeomorfismus.*

14.4 Souvislé metrické prostory

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset X$ je **obojetná**, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená v (X, ρ).

Definice. Metrický prostor se nazývá **souvislý**, není-li sjednocením dvou disjunktních neprázdných otevřených množin. Podmnožina M metrického prostoru (X, ρ) se nazývá **souvislá**, jestliže (M, ρ) je souvislý.

Lemma 14.14. *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $A, B \subset M$ jsou disjunktní neprázdné otevřené množiny v (M, ρ) takové, že $M = A \cup B$. Potom existují G a H disjunktní otevřené množiny v (X, ρ) takové, že $A = M \cap G$ a $B = M \cap H$.*

Věta 14.15. *Množina $E \subset \mathbb{R}$ je souvislá, právě když E je interval.*

Věta 14.16. *Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Potom platí:*

(i) *Je-li $Y \subset X$ souvislá a $Y \subset M \subset \overline{Y}$, pak M je souvislá.*

(ii) *Nechť I je neprázdná množina a Y_α, $\alpha \in I$, jsou souvislé podmnožiny X splňující $\bigcap_{\alpha \in I} Y_\alpha \neq \emptyset$. Potom $\bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha$ je souvislá.*

Věta 14.17. *Nechť (X, ρ) je souvislý metrický prostor, (Y, σ) je metrický prostor a $f : X \to Y$ je spojité. Pak $f(X)$ je souvislá.*