13 Stejnoměrná konvergence

13.1 Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

Definice. Nechť M je množina, (Q,σ) je metrický prostor, f, f_n, $n \in \mathrm{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

- **konverguje bodově** k f na M, jestliže $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, neboli
$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathrm{N}\ \forall n \in \mathrm{N}, n \geq n_0 :\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$
Značíme $f_n \to f$ na M,

- **konverguje stejnoměrně** k f na M, jestliže
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathrm{N} \forall x \in M\ \forall n \in \mathrm{N}, n \geq n_0 :\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$
Značíme $f_n \rightrightarrows f$ na M.

Definice. Nechť (M,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, f, f_n, $n \in \mathrm{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje lokálně stejnoměrně** k f na (M,ρ), jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$, že $\{f_n|_{B(x,r)}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $f|_{B(x,r)}$ stejnoměrně na $B(x,r)$, značíme $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na M.

Věta 13.1. *Nechť M je neprázdná množina, (Q,σ) je metrický prostor, $f_n : M \to Q$, $n \in \mathrm{N}$, a $f : M \to Q$. Pak platí $f_n \rightrightarrows f$ na M, právě když $\lim_{n\to\infty} \sup\{\sigma(f_n(x), f(x));\ x \in M\} = 0$.*

Věta 13.2 (Moore–Osgood)**.** *Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a nechť funkce f, f_n z P do $\mathbf{R}$, $n \in \mathrm{N}$, splňují*

(i) *$f_n \rightrightarrows f$ na $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ pro jisté $r > 0$,*

(ii) *$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$ pro každé $n \in \mathrm{N}$.*

Potom existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

Věta 13.3. *Nechť (P,ρ), (Q,σ) jsou metrické prostory, $f_n : P \to Q$, $n \in \mathrm{N}$, $f : P \to Q$ a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na P. Jsou-li f_n spojitá zobrazení, pak f je také spojité.*

Věta 13.4. *Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $f_n\colon (a,b) \to \mathbf{R}$, $n \in \mathrm{N}$. Potom $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu (a,b), právě když $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c,d]$, kde $c, d \in (a,b)$.*

Lemma 13.5. *Nechť M je množina a $g_n\colon M \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Posloupnost $\{g_n\}$ je stejnoměrně konvergentní na M, právě když je* ***stejnoměrně cauchyovská*** *na M, tj.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n, m \in \mathbf{N},\ n, m \geq n_0\ \forall x \in M:\ |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

Věta 13.6. *Nechť (a,b) je omezený interval, $f_n\colon (a,b) \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Nechť*

(i) *f_n má vlastní derivaci na intervalu (a,b), $n \in \mathbf{N}$,*

(ii) *existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje,*

(iii) *$\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na (a,b).*

Potom existuje funkce f taková, že $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b), f má vlastní derivaci na (a,b) a platí $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a,b).

Věta 13.7. *Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na neprázdném omezeném intervalu (a,b) a $f_n \in \mathcal{N}(a,b)$, $n \in \mathbf{N}$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí*

$$\lim_{n\to\infty} (N)\int_a^b f_n = (N)\int_a^b f.$$

Věta 13.8 (Dini)**.** *Nechť (K,ρ) je kompaktní metrický prostor. Nechť $\{f_n\}$ je monotónní posloupnost spojitých funkcí na K, která konverguje bodově ke spojité funkci $f\colon K \to \mathbf{R}$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na K.*

Věta 13.9 (Weierstrass)**.** *Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a,b]$. Pak pro každé $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, existuje polynom $P\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takový, že*

$$\forall x \in [a,b]:\ |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

13.2 Stejnoměrná konvergence řad funkcí

Definice. Nechť M je množina, $(Q, ||\cdot||)$ je normovaný lineární prostor, $f_n\colon M \to Q$, $n \in \mathbf{N}$. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je **bodově konvergentní** na M, jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{m} f_k\}_{m=1}^{\infty}$ je bodově konvergentní na M. Pojmy **stejnoměrné konvergence** a **lokálně stejnoměrné konvergence** řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se definují analogicky.

Věta 13.10 (Weierstrassovo kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí definovaných na neprázdné množině M s hodnotami v $\mathbf{R}$ a nechť pro $S_n = \sup\{|f_n(x)|;\ x \in M\}$ platí $\sum_{n=1}^{\infty} S_n < \infty$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M.*

Věta 13.11 (záměna sumy a derivace)**.** *Nechť* (a, b) *je omezený neprázdný interval a* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je řada funkcí z* $\mathbf{R}$ *do* $\mathbf{R}$ *splňující:*

(i) f_n *má vlastní derivaci na* (a, b)*,* $n \in \mathbf{N}$,

(ii) *existuje* $x_0 \in (a, b)$ *takové, že* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *konverguje,*

(iii) *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *konverguje stejnoměrně na* (a, b).

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně na* (a, b) *a pro každé* $x \in (a, b)$ *platí*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Věta 13.12 (záměna sumy a integrálu)**.** *Nechť* (a, b) *je omezený neprázdný interval a* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je řada funkcí splňující:*

(i) $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$*,* $n \in \mathbf{N}$,

(ii) *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně k funkci* f *na* (a, b).

Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (N) \int_a^b f_n = (N) \int_a^b f.$$

Věta 13.13 (Abelovo kritérium)**.** *Nechť* M *je množina,* $a_n : M \to \mathbf{R}$ *a* $b_n : M \to \mathbf{R}$*,* $n \in \mathbf{N}$. *Dále nechť platí*

(i) $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónní pro každé* $x \in M$,

(ii) $\{b_n\}$ *je posloupnost stejně omezených funkcí, tj.*

$$\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}\ \forall x \in M\colon\ |b_n(x)| \le K,$$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje stejnoměrně na* M.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje stejnoměrně na* M.

Věta 13.14 (Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť* M *je množina,* $a_n : M \to \mathbf{R}$ *a* $b_n : M \to \mathbf{R}$*,* $n \in \mathbf{N}$. *Dále nechť platí*

(i) $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónní pro každé* $x \in M$,

(ii) $\{b_n\}$ *konverguje stejnoměrně k nulové funkci na* M,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má stejně omezené částečné součty na* M*, tj.*

$$\exists K \in \mathbf{R}\ \forall m \in \mathbf{N}\ \forall x \in M\colon \left|\sum_{j=1}^{m} a_j(x)\right| \le K.$$

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje stejnoměrně na* M.

Věta 13.15. *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *je mocninná řada* ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$) *s poloměrem konvergence* $R \in [0, \infty]$*. Potom řada konverguje lokálně stejnoměrně na množině* $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Věta 13.16 (Abelova věta)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *je mocninná řada* ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$) *a* $R \in (0, \infty)$*. Pokud* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *konverguje, pak mocninná řada konverguje stejnoměrně na* $[x_0, x_0 + R]$ *a*

$$\lim_{x \to x_0 + R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Věta (Abelova věta (Věta 8.7))**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ *jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$