13. Stejnoměrná konvergence

Definice

Nechť M je množina, (Q, σ) je metrický prostor, f, f_n, $n \in \mathbf{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

- **konverguje bodově** k f na M, jestliže $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, neboli

$$\forall x \in M \ \forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$$
$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \to f$ na M,

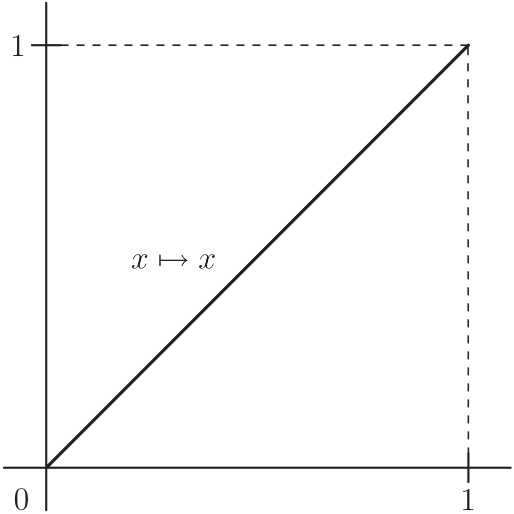
13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí

- **konverguje stejnoměrně** k f na M, jestliže

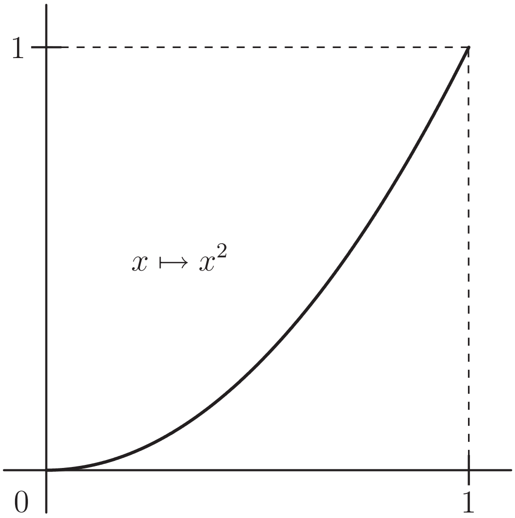
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N}$$
$$\forall x \in M \; \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$ na M.

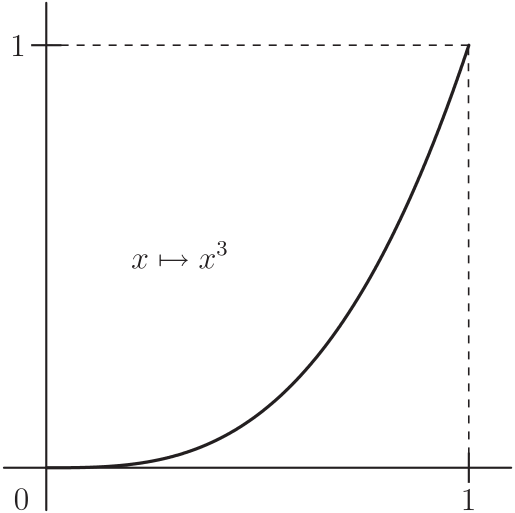
13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



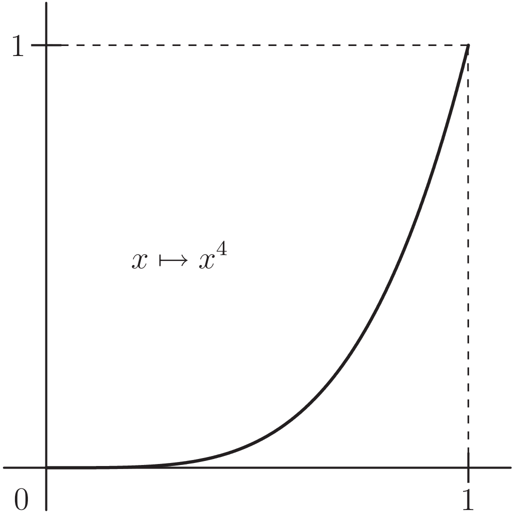
13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



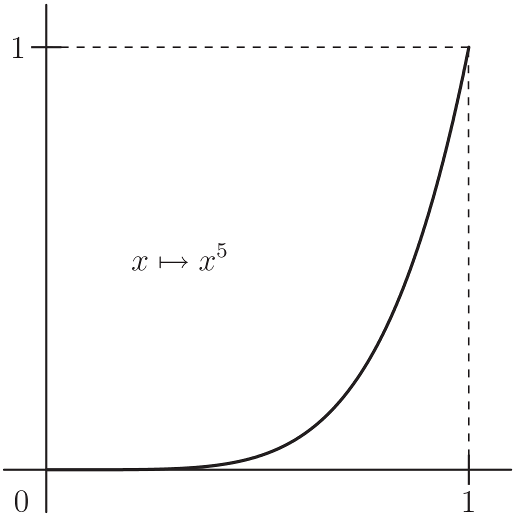
13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



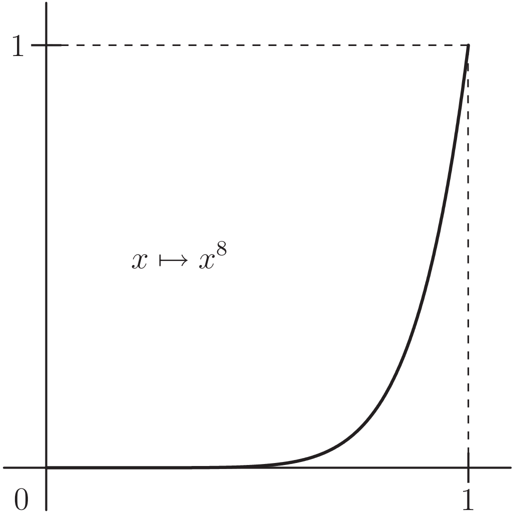
13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



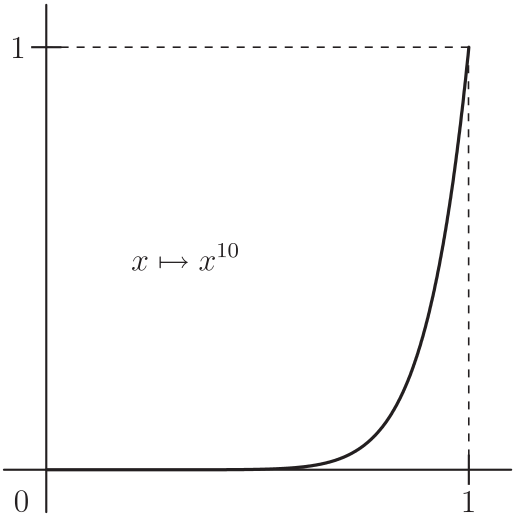
13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



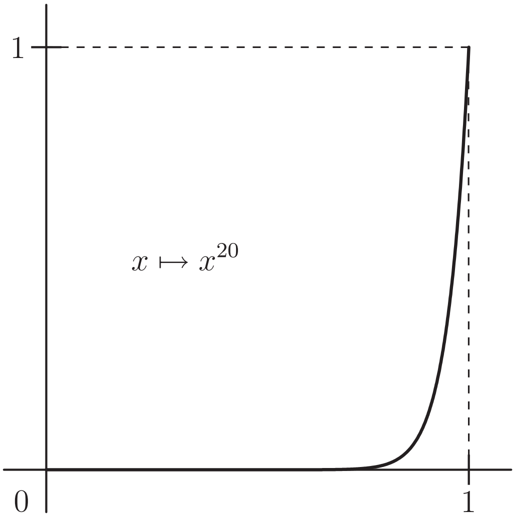
13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



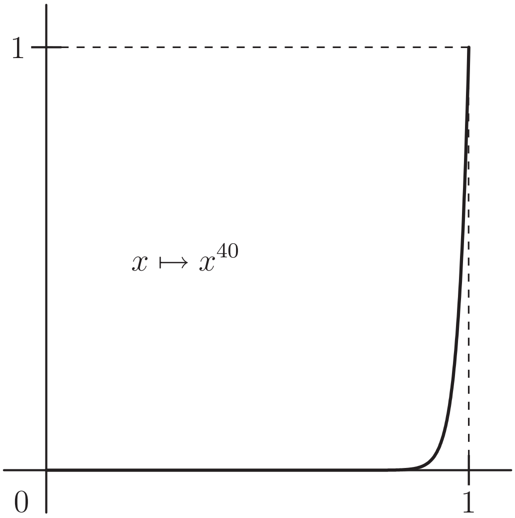
13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



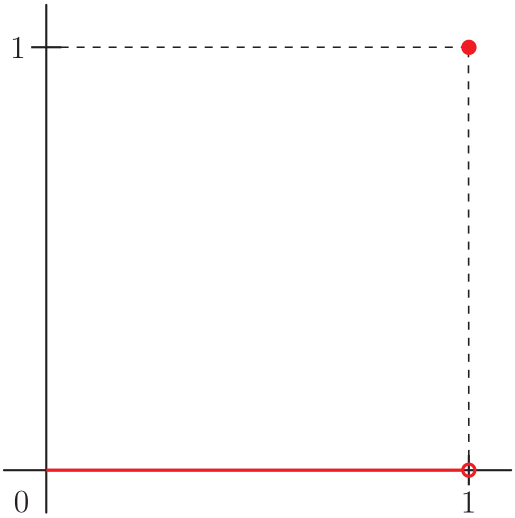
13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



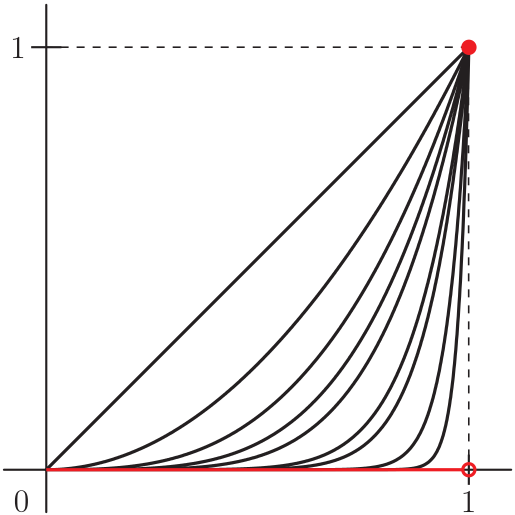
13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



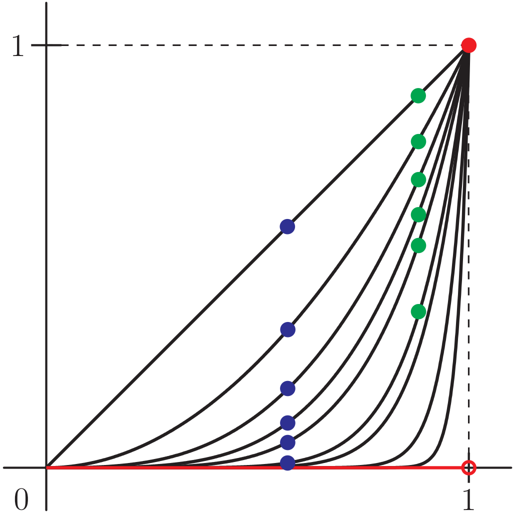
13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



13.1. Stejnoměrná konvergence psl. funkcí



Definice

Nechť (M,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, f, f_n, $n \in \mathbf{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje lokálně stejnoměrně** k f na (M,ρ), jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$, že $\{f_n|_{B(x,r)}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $f|_{B(x,r)}$ stejnoměrně na $B(x,r)$, značíme $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na M.

Věta 13.1

Nechť M je neprázdná množina, (Q, σ) je metrický prostor, $f_n : M \to Q$, $n \in \mathbf{N}$, a $f : M \to Q$. Pak platí $f_n \rightrightarrows f$ na M, právě když $\lim_{n\to\infty} \sup\{\sigma(f_n(x), f(x));\ x \in M\} = 0$.

Věta 13.1

Nechť M je neprázdná množina, (Q, σ) je metrický prostor, $f_n : M \to Q$, $n \in \mathbf{N}$, a $f : M \to Q$. Pak platí $f_n \rightrightarrows f$ na M, právě když $\lim_{n\to\infty} \sup\{\sigma(f_n(x), f(x));\ x \in M\} = 0$.

Věta 13.2 (Moore–Osgood)

Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a nechť funkce f, f_n z P do $\mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, splňují

(i) $f_n \rightrightarrows f$ *na* $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ *pro jisté* $r > 0$,

(ii) $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$.

Potom existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny.*

Věta 13.3

Nechť (P, ρ), (Q, σ) *jsou metrické prostory,* $f_n : P \to Q$, $n \in \mathbf{N}$, $f : P \to Q$ *a* $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ *na* P*. Jsou-li* f_n *spojitá zobrazení, pak* f *je také spojité.*

Věta 13.4

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$*,* $a < b$*,* $f_n\colon (a, b) \to \mathbf{R}$*,* $n \in \mathbf{N}$*. Potom* $\{f_n\}$ *konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu* (a, b)*, právě když* $\{f_n\}$ *konverguje stejnoměrně na každém intervalu* $[c, d]$*, kde* $c, d \in (a, b)$*.*

Lemma 13.5

Nechť M je množina a $g_n\colon M \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Posloupnost $\{g_n\}$ je stejnoměrně konvergentní na M, právě když je ***stejnoměrně cauchyovská*** *na M, tj.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}$$
$$\forall n, m \in \mathbf{N},\ n, m \geq n_0\ \forall x \in M:\ |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

Věta 13.6

Nechť (a, b) *je omezený interval,* $f_n\colon (a, b) \to \mathbf{R}$*,* $n \in \mathbf{N}$*.*
Nechť

(i) f_n *má vlastní derivaci na intervalu* (a, b)*,* $n \in \mathbf{N}$*,*

(ii) *existuje* $x_0 \in (a, b)$ *takové, že* $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje,*

(iii) $\{f_n'\}$ *konverguje stejnoměrně na* (a, b)*.*

Potom existuje funkce f *taková, že* $f_n \rightrightarrows f$ *na* (a, b)*,* f *má vlastní derivaci na* (a, b) *a platí* $f_n' \rightrightarrows f'$ *na* (a, b)*.*

Věta 13.7

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ *na neprázdném omezeném intervalu* (a, b) *a* $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$, $n \in \mathbf{N}$. *Potom* $f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} (N) \int_a^b f_n = (N) \int_a^b f.$$

Věta 13.8 (Dini)

Nechť (K, ρ) *je kompaktní metrický prostor. Nechť* $\{f_n\}$ *je monotónní posloupnost spojitých funkcí na* K*, která konverguje bodově ke spojité funkci* $f\colon K \to \mathbf{R}$*. Pak* $f_n \rightrightarrows f$ *na* K*.*

Věta 13.8 (Dini)

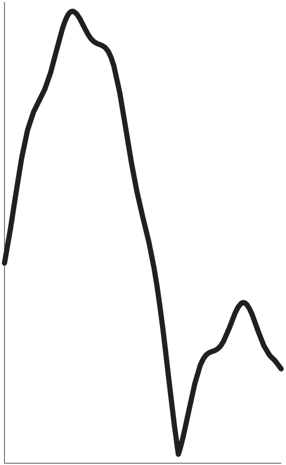
Nechť (K, ρ) je kompaktní metrický prostor. Nechť $\{f_n\}$ je monotónní posloupnost spojitých funkcí na K, která konverguje bodově ke spojité funkci $f: K \to \mathbf{R}$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na K.

Věta 13.9 (Weierstrass)

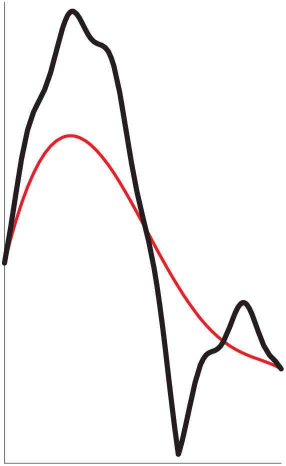
Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak pro každé $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje polynom $P: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takový, že

$$\forall x \in [a, b] : \ |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

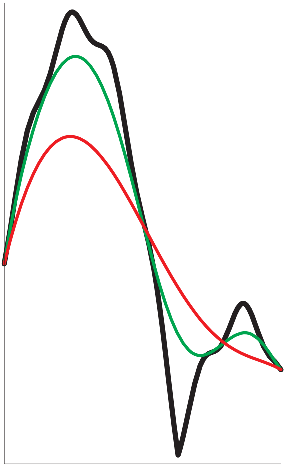
Bernsteinovy polynomy



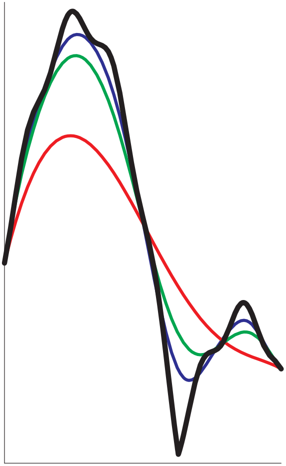
Bernsteinovy polynomy



Bernsteinovy polynomy



Bernsteinovy polynomy



13.2. Stejnoměrná konvergence řad funkcí

Definice

Nechť M je množina, $(Q, ||\cdot||)$ je normovaný lineární prostor, $f_n \colon M \to Q$, $n \in \mathbf{N}$. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je **bodově konvergentní** na M, jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{m} f_k\}_{m=1}^{\infty}$ je bodově konvergentní na M. Pojmy **stejnoměrné konvergence** a **lokálně stejnoměrné konvergence** řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se definují analogicky.

Věta 13.10 (Weierstrassovo kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je řada funkcí definovaných na neprázdné množině* M *s hodnotami v* $\mathbf{R}$ *a nechť pro* $S_n = \sup\{|f_n(x)|;\ x \in M\}$ *platí* $\sum_{n=1}^{\infty} S_n < \infty$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně na* M.

Věta 13.11 (záměna sumy a derivace)

Nechť (a, b) *je omezený neprázdný interval a* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je řada funkcí z* $\mathbf{R}$ *do* $\mathbf{R}$ *splňující:*

(i) f_n *má vlastní derivaci na* (a, b), $n \in \mathbf{N}$,

(ii) *existuje* $x_0 \in (a, b)$ *takové, že* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *konverguje,*

(iii) *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *konverguje stejnoměrně na* (a, b).

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně na* (a, b) *a pro každé* $x \in (a, b)$ *platí*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Věta 13.12 (záměna sumy a integrálu)

Nechť (a, b) *je omezený neprázdný interval a* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je řada funkcí splňující:*

(i) $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$, $n \in \mathbf{N}$,

(ii) *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně k funkci* f *na* (a, b).

Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (N) \int_a^b f_n = (N) \int_a^b f.$$

Věta 13.13 (Abelovo kritérium)

Nechť M je množina, $a_n : M \to \mathbf{R}$ a $b_n : M \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Dále nechť platí

(i) $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónní pro každé $x \in M$,*

(ii) $\{b_n\}$ *je posloupnost stejně omezených funkcí, tj.*

$$\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}\ \forall x \in M\colon\ |b_n(x)| \leq K,$$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje stejnoměrně na M.*

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje stejnoměrně na M.

Věta 13.14 (Dirichletovo kritérium)

Nechť M je množina, $a_n : M \to \mathbf{R}$ a $b_n : M \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Dále nechť platí

(i) $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónní pro každé* $x \in M$,

(ii) $\{b_n\}$ *konverguje stejnoměrně k nulové funkci na* M,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má stejně omezené částečné součty na* M, *tj.*

$$\exists K \in \mathbf{R}\ \forall m \in \mathbf{N}\ \forall x \in M \colon \left| \sum_{j=1}^{m} a_j(x) \right| \leq K\,.$$

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje stejnoměrně na* M.

13.2. Stejnoměrná konvergence řad funkcí

Lemma (Abelova parciální sumace (Lemma 8.1))

Nechť $n \in \mathbf{N}$ *a* $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$. *Označme* $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ *pro* $k = 1, \ldots, n$. *Pak platí*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{j=1}^{n-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_n b_n.$$

Jestliže navíc $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$, *pak platí*

$$b_1 \cdot \min_{i=1..n} s_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq b_1 \cdot \max_{i=1..n} s_i.$$

Věta 13.15

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$) s poloměrem konvergence $R \in [0, \infty]$. Potom řada konverguje lokálně stejnoměrně na množině $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Věta 13.16 (Abelova věta)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada (*$x_0 \in \mathbf{R}$, $a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$*) a* $R \in (0,\infty)$*. Pokud* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *konverguje, pak mocninná řada konverguje stejnoměrně na* $[x_0, x_0+R]$ *a*

$$\lim_{x \to x_0+R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Věta (Abelova věta (Věta 8.7))

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ *jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right).$$