12. Funkce více proměnných

12.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $1 \leq i \leq n$.

12.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $1 \leq i \leq n$. Pak **parciální derivaci funkce** f **v bodě** $\boldsymbol{a}$ **podle** i**-té proměnné** definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Definice

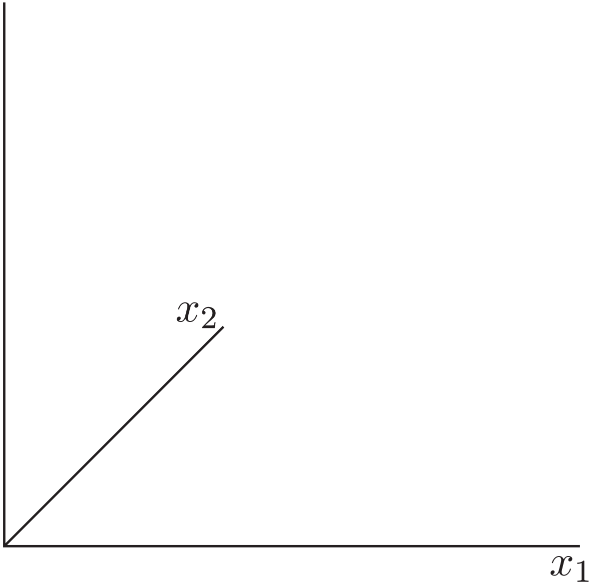
Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $1 \leq i \leq n$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle i-té proměnné** definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

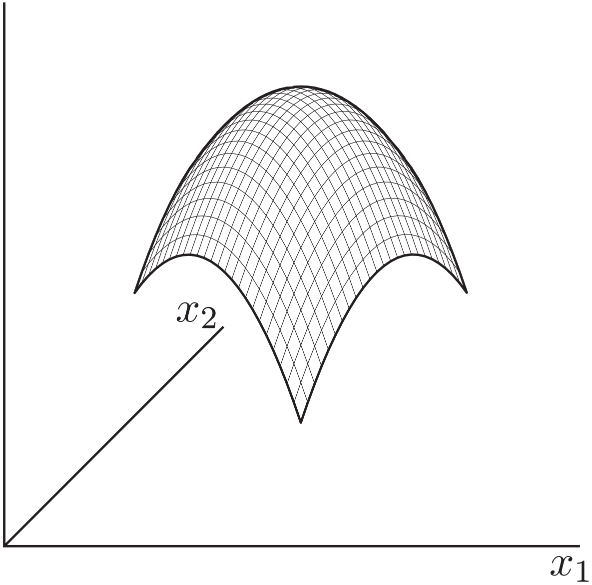
Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

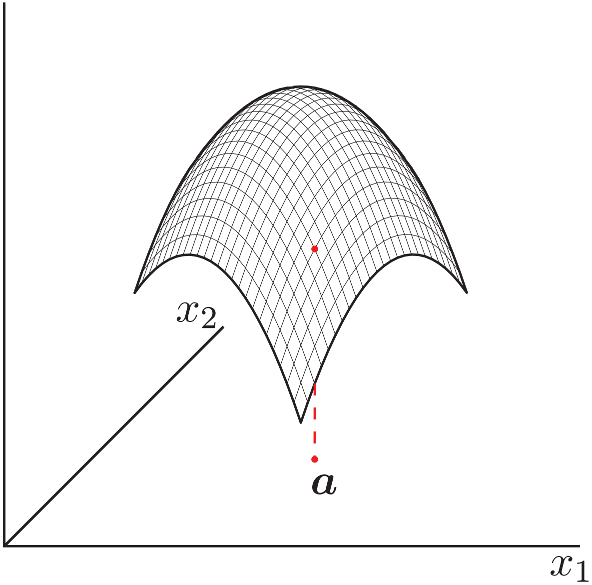
12.1 Parciální derivace a totální diferenciál



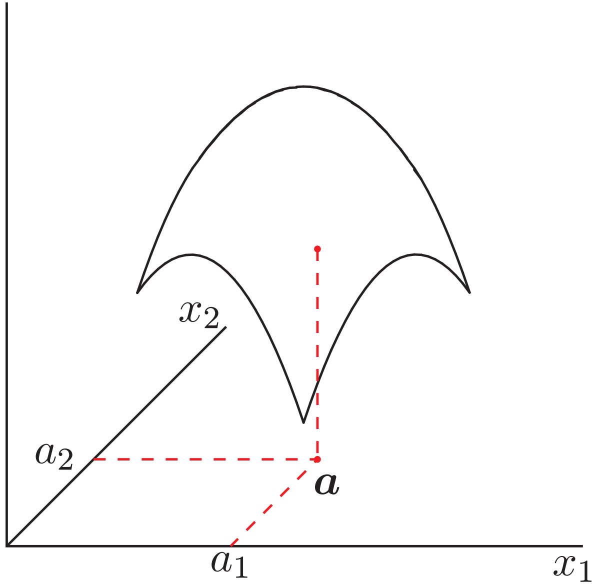
12.1 Parciální derivace a totální diferenciál

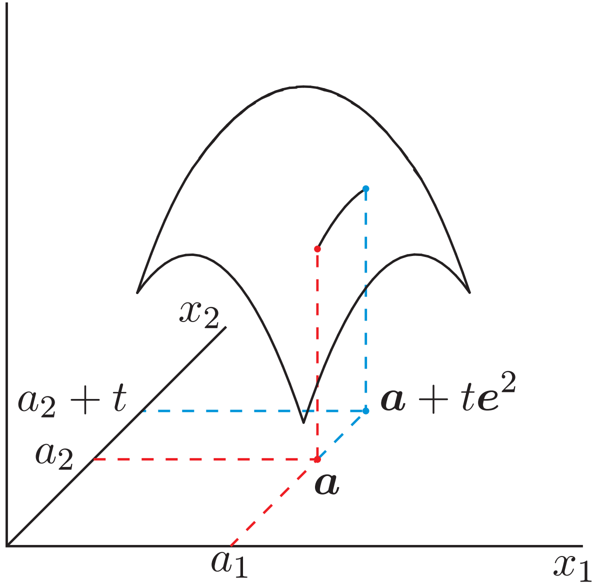


12.1 Parciální derivace a totální diferenciál



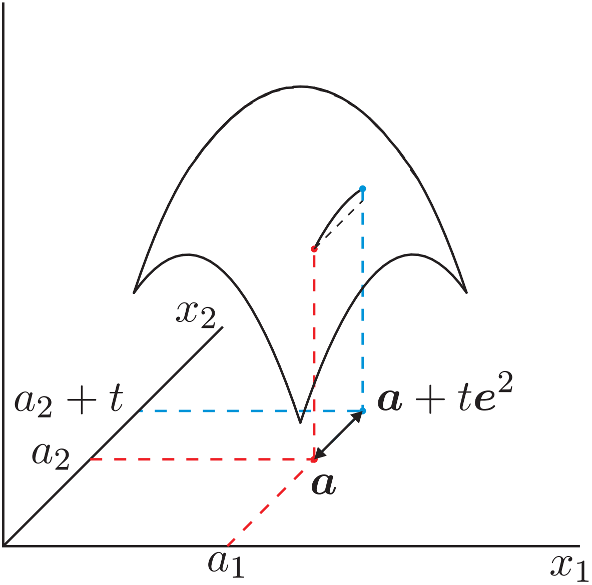
12.1 Parciální derivace a totální diferenciál





x_2
$a_2 + t$
$\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^2$
a_2
$\boldsymbol{a}$
a_1
x_1

12.1 Parciální derivace a totální diferenciál



12.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je lineární zobrazení.

12.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$**, jestliže platí

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{o}} \frac{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{||\boldsymbol{h}||} = 0.$$

12.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Věta 12.1 (vztah totálního diferenciálu a parciální derivace)

Nechť L je diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Potom existují parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})$$

a pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n$ platí

$$L(h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})h_n.$$

Věta 12.2

Má-li funkce f v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ totální diferenciál, je f v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá.

Lemma 12.3

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I$. Nechť v každém bodě I existují parciální derivace f podle všech proměnných. Potom existují body $\boldsymbol{\xi}^1, \ldots, \boldsymbol{\xi}^n \in I$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{\xi}^i)(b_i - a_i).$$

Věta 12.4

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě $\boldsymbol{a}$.

Věta 12.4

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě $\mathbf{a}$. Potom má f v bodě $\mathbf{a}$ totální diferenciál.

Definice

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Pak **derivací funkce** f **v bodě** $\boldsymbol{a}$ **podle vektoru** $\boldsymbol{v}$ rozumíme (vlastní) limitu

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

12.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Pak **derivací funkce** f **v bodě** $\boldsymbol{a}$ **podle vektoru** $\boldsymbol{v}$ rozumíme (vlastní) limitu

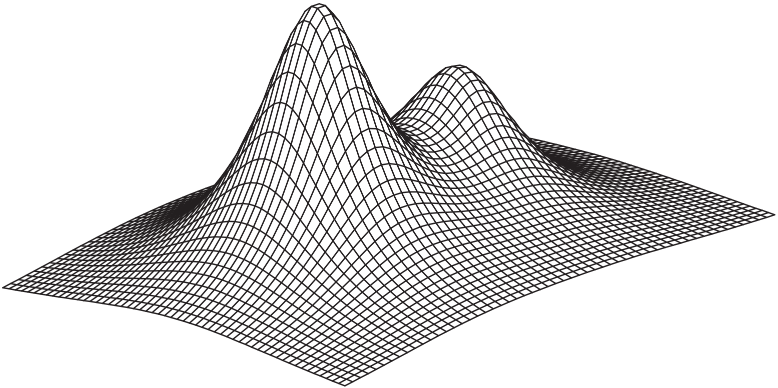
$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Definice

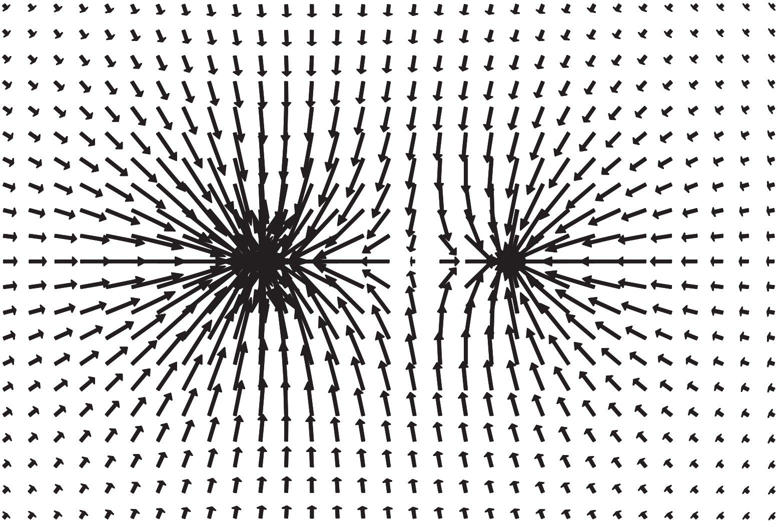
Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ existuje. Pak definujeme **gradient funkce** f **v bodě** $\boldsymbol{a}$ jako vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right) \in \mathbf{R}^n.$$

12.1 Parciální derivace a totální diferenciál



12.1 Parciální derivace a totální diferenciál



Věta 12.5

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Nechť existuje $f'(\boldsymbol{a})$.

Věta 12.5

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Nechť existuje $f'(\boldsymbol{a})$. Pak platí

(i) $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$,

Věta 12.5

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Nechť existuje $f'(\boldsymbol{a})$. Pak platí

(i) $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$,

(ii) $\max\{D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a});\ ||\boldsymbol{v}|| = 1\} = ||\nabla f(\boldsymbol{a})||$.

Definice

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení.

12.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **derivací zobrazení** F **v bodě** $\boldsymbol{a}$, jestliže platí

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{o}} \frac{||F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})||}{||\boldsymbol{h}||} = 0.$$

Věta 12.6

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, které má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ derivaci L. Potom je L reprezentováno maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

Věta 12.7

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $F'(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom F je spojité v $\boldsymbol{a}$.

12.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Věta 12.7

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $F'(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom F je spojité v $\boldsymbol{a}$.

Věta 12.8

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$, jsou spojité v $\boldsymbol{a}$. Potom $F'(\boldsymbol{a})$ existuje.

Lemma 12.9

Nechť $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení. Pak existuje $C \in \mathbf{R}$ takové, že $||L(\boldsymbol{x})|| \leq C||\boldsymbol{x}||$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$.

Lemma 12.9

Nechť $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ *je lineární zobrazení. Pak existuje* $C \in \mathbf{R}$ *takové, že* $||L(\boldsymbol{x})|| \leq C||\boldsymbol{x}||$ *pro každé* $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$*.*

Definice

Normou lineárního zobrazení $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ rozumíme číslo

$$||L|| = \sup\left\{\frac{||L(\boldsymbol{x})||}{||\boldsymbol{x}||};\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}\right\}.$$

Lemma 12.10

Nechť f je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom existují $C \in \mathbf{R}$ a $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta)$ platí $||f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})|| \leq C||\boldsymbol{h}||$.

Lemma 12.10

Nechť f je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom existují $C \in \mathbf{R}$ a $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta)$ platí $||f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})|| \leq C||\boldsymbol{h}||$.

Věta 12.11 (derivace složeného zobrazení)

Nechť f je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, g je zobrazení z $\mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^s$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}) \in \mathbf{R}^k$. Jestliže existují $f'(\boldsymbol{a})$ a $g'(\boldsymbol{b})$, pak existuje $(g \circ f)'(\boldsymbol{a})$ a platí $(g \circ f)'(\boldsymbol{a}) = g'(\boldsymbol{b}) \circ f'(\boldsymbol{a})$.

Důsledek 12.12 (řetízkové pravidlo)

Nechť funkce $f_1, \dots, f_k$ *z* $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}$ *mají v bodě* $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ *totální diferenciál a funkce* g *z* $\mathbf{R}^k$ *do* $\mathbf{R}$ *má v bodě* $\boldsymbol{b} = (f_1(\boldsymbol{a}), \dots, f_k(\boldsymbol{a}))$ *totální diferenciál. Definujme funkci* h *z* $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}$ *předpisem*

$$h(\boldsymbol{x}) = g(f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_k(\boldsymbol{x})).$$

Důsledek 12.12 (řetízkové pravidlo)

Nechť funkce $f_1, \dots, f_k$ *z* $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}$ *mají v bodě* $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ *totální diferenciál a funkce* g *z* $\mathbf{R}^k$ *do* $\mathbf{R}$ *má v bodě* $\boldsymbol{b} = (f_1(\boldsymbol{a}), \dots, f_k(\boldsymbol{a}))$ *totální diferenciál. Definujme funkci* h *z* $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}$ *předpisem*

$$h(\boldsymbol{x}) = g(f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_k(\boldsymbol{x})).$$

Potom má h *v bodě* $\boldsymbol{a}$ *totální diferenciál a pro* $i \in \{1, \dots, n\}$ *platí*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{b}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}).$$

Věta 12.13 (o přírůstku funkce)

Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$, která má diferenciál v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^n$. Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ a úsečka L spojující body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je obsažena v G, tj. $L = \{(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b};\ t \in [0,1]\} \subset G$.

Věta 12.13 (o přírůstku funkce)

Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$, která má diferenciál v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^n$. Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ a úsečka L spojující body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je obsažena v G, tj. $L = \{(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b};\ t \in [0,1]\} \subset G$. Pak existuje $\boldsymbol{\xi} \in L$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

Definice

Řekneme, že množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro každé dva body z A platí, že úsečka, která je spojuje, je obsažena v A.

Definice

Řekneme, že množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro každé dva body z A platí, že úsečka, která je spojuje, je obsažena v A.

Věta 12.14 (věta o přírůstku vektorové funkce)

Nechť $n, k \in \mathbf{N}$, $K \in \mathbf{R}$, $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $f : G \to \mathbf{R}^k$ je zobrazení mající derivaci v každém bodě G a nechť

$$\sup\{||f'(\boldsymbol{x})||;\ \boldsymbol{x} \in G\} \leq K.$$

12.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice

Řekneme, že množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro každé dva body z A platí, že úsečka, která je spojuje, je obsažena v A.

Věta 12.14 (věta o přírůstku vektorové funkce)

Nechť $n, k \in \mathbf{N}$, $K \in \mathbf{R}$, $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $f\colon G \to \mathbf{R}^k$ je zobrazení mající derivaci v každém bodě G a nechť

$$\sup\{\|f'(\boldsymbol{x})\|;\ \boldsymbol{x} \in G\} \leq K.$$

*Pak f je **lipschitzovské s konstantou** K, tj.*

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G: \ \|f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})\| \leq K \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

12.2 Derivace vyšších řádů

Definice

Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$ značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$, pokud $i \neq j$,

Definice

Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$ značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{a})$, pokud $i = j$.

12.2 Derivace vyšších řádů

Definice

Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$ značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{a})$, pokud $i = j$. Analogicky značíme parciální derivace vyšších řádů.

12.2 Derivace vyšších řádů

Definice

Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$ značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{a})$, pokud $i = j$. Analogicky značíme parciální derivace vyšších řádů.

Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $f \colon G \to \mathbf{R}$ a $p \in \mathbf{N}$. Řekneme, že f je **třídy** $\mathcal{C}^p$, jestliže všechny parciální derivace funkce f až do řádu p včetně jsou spojité na G. Množinu všech funkcí $f \colon G \to \mathbf{R}$ třídy $\mathcal{C}^p$ označujeme $\mathcal{C}^p(G)$ a klademe $\mathcal{C}^\infty(G) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{C}^p(G)$. O funkci g řekneme, že je **třídy** $\mathcal{C}^p$ **na** G ($p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$), jestliže $g|_G \in \mathcal{C}^p(G)$.

12.2 Derivace vyšších řádů

Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ a $f\colon G \to \mathbf{R}^k$. Řekneme, že f je zobrazení **třídy** $\mathcal{C}^p$, jestliže jeho složky $f_1, \dots, f_k$ jsou třídy $\mathcal{C}^p$.

Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ a $f : G \to \mathbf{R}^k$. Řekneme, že f je zobrazení **třídy** $\mathcal{C}^p$, jestliže jeho složky $f_1, \dots, f_k$ jsou třídy $\mathcal{C}^p$.

Věta 12.15

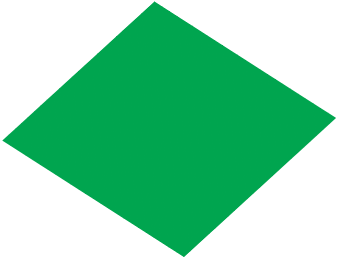
*Nechť $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbf{R}^n$, $H \subset \mathbf{R}^k$ jsou otevřené množiny, $f : G \to \mathbf{R}^k$, $g : H \to \mathbf{R}^s$ jsou **třídy** $\mathcal{C}^p$ a platí $f(G) \subset H$. Pak zobrazení $g \circ f$ je třídy $\mathcal{C}^p$.*

Věta 12.16

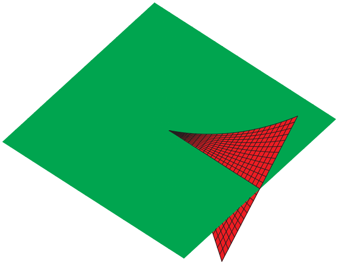
Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže obě funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají totální diferenciál v $\boldsymbol{a}$, pak

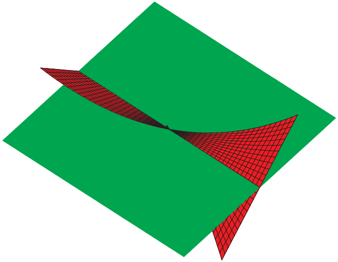
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}).$$

12.2 Derivace vyšších řádů

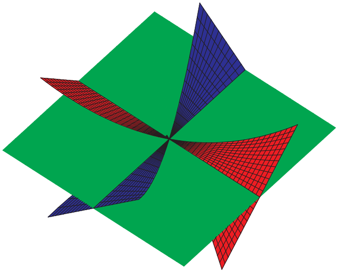


12.2 Derivace vyšších řádů





12.2 Derivace vyšších řádů



Důsledek 12.17

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, f je třídy $\mathcal{C}^p$ na G ($p \in \mathbf{N}$), $\boldsymbol{a} \in G$, $\pi\colon \{1,\dots,p\} \to \{1,\dots,p\}$ je permutace $i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,n\}$. Potom platí

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\pi(p)}} \dots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(\boldsymbol{a})$$

12.2 Derivace vyšších řádů

Definice

Nechť $n, p \in \mathbf{N}$. Zobrazení $L : (\mathbf{R}^n)^p \to \mathbf{R}^k$ se nazývá p-**lineární**, jestliže

$$\boldsymbol{u} \mapsto L(\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{i-1}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}^{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}^p)$$

je lineární zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$ pro každé $i \in \{1, \dots, p\}$, $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \dots, \boldsymbol{v}^{i-1}, \boldsymbol{v}^{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}^p \in \mathbf{R}^n$. Množinu všech p-lineárních zobrazení z $(\mathbf{R}^n)^p$ do $\mathbf{R}^k$ značíme $\mathcal{L}_p(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$.

Lemma 12.18

Nechť $L \in \mathcal{L}_p(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$. Potom existuje $C \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall (\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^p) \in (\mathbf{R}^n)^p : \ ||L(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^p)|| \leq C||\boldsymbol{u}^1|| \cdots ||\boldsymbol{u}^p||.$$

Lemma 12.18

Nechť $L \in \mathcal{L}_p(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$. Potom existuje $C \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall (\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^p) \in (\mathbf{R}^n)^p : \ ||L(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^p)|| \leq C||\boldsymbol{u}^1|| \cdots ||\boldsymbol{u}^p||.$$

Definice

Normou zobrazení $L \in \mathcal{L}_p(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$ rozumíme číslo

$$||L|| = \sup\{||L(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^p)||; \ ||\boldsymbol{u}^1|| \leq 1, \dots, ||\boldsymbol{u}^p|| \leq 1\}.$$

12.2 Derivace vyšších řádů

Definice

Nechť f je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, které má na jistém okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ (jednoznačně určenou derivaci $f^{(p-1)}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{L}_{p-1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$, která je řádu $p-1$. **Derivací p-tého řádu** zobrazení f v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ budeme rozumět $L \in \mathcal{L}_p(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$ splňující

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{o}} \frac{||f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h}, \cdot, \ldots, \cdot)||}{||\boldsymbol{h}||} = 0.$$

Věta 12.19

Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$ a $L \in \mathcal{L}_p(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ je p-tou derivací f v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Potom mají všechny parciální derivace funkce f řádu $p-1$ totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$ a platí

$$L(\boldsymbol{e}^{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}^{i_p}) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(\boldsymbol{a})$$

pro každé $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$.

Důsledek 12.20

Nechť f je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$ a $f^{(p)}(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom je $f^{(p)}(\boldsymbol{a})$ symetrické zobrazení, tj. pokud $\pi : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, p\}$ je permutace, pak

$$f^{(p)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^p) = f^{(p)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}^{\pi(1)}, \dots, \boldsymbol{u}^{\pi(p)})$$

pro každé $\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^p \in \mathbf{R}^n$.

Věta 12.21

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f\colon G \to \mathbf{R}^k$ je třídy $\mathcal{C}^p$ na G. Potom $f^{(p)}(\boldsymbol{x})$ existuje pro každé $\boldsymbol{x} \in G$.

Definice

Nechť pro $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ existuje $f^{(p)}(\boldsymbol{a})$, $p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom **Taylorovým polynomem** p**-tého řádu funkce** f **v bodě** $\boldsymbol{a}$ rozumíme polynom n proměnných

$$T_p^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\boldsymbol{a})(\underbrace{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\ldots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}_{j-\text{krát}}).$$

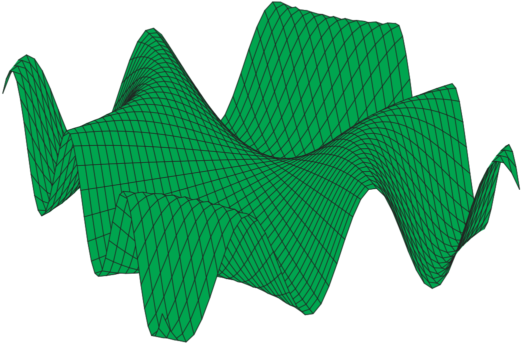
Věta 12.22 (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $f \in \mathcal{C}^{p+1}(G)$ ($p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), $\boldsymbol{a} \in G$, $\boldsymbol{x} \in G$. Potom existuje ξ ležící na úsečce spojující body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ takové, že

$$f(\boldsymbol{x}) = T_p^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\xi)(\underbrace{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\dots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}_{(p+1)-\text{krát}}).$$

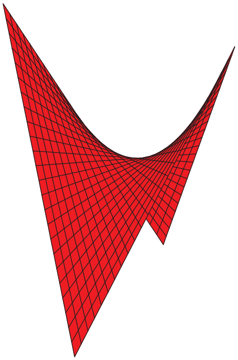
12.2 Derivace vyšších řádů

$f(x, y) = \sin(xy)$



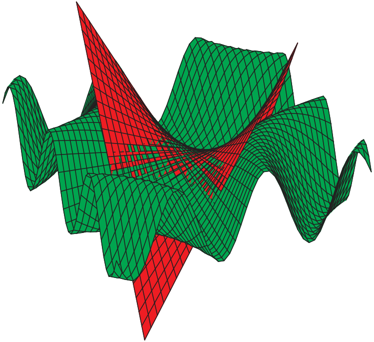
12.2 Derivace vyšších řádů

$$f(x, y) = \sin(xy)$$



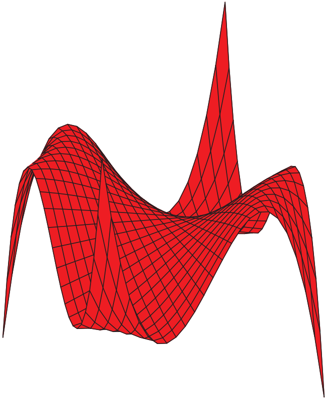
12.2 Derivace vyšších řádů

$$f(x,y) = \sin(xy)$$



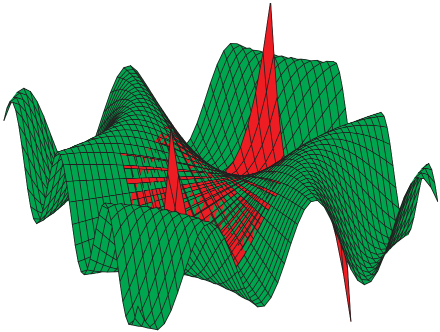
12.2 Derivace vyšších řádů

$$f(x, y) = \sin(xy)$$



12.2 Derivace vyšších řádů

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

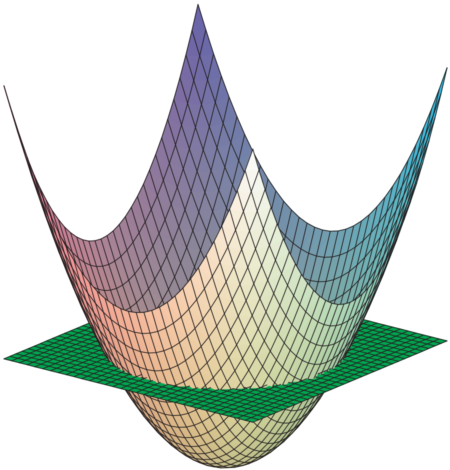


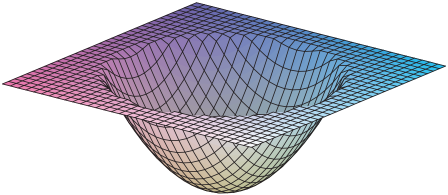
Věta 12.23 (Peanův tvar zbytku)

Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$, která je třídy $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbf{N}$) na jistém okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Potom platí

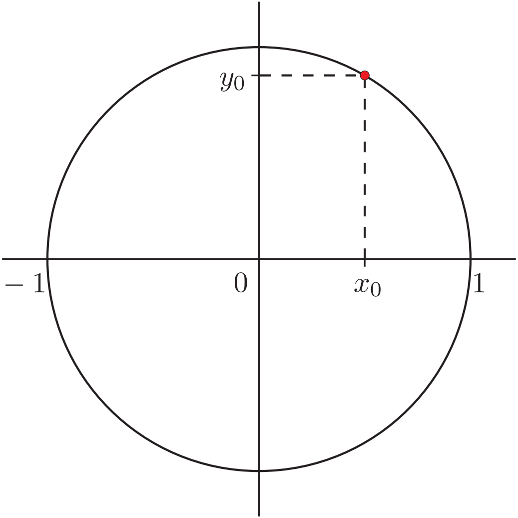
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - T_p^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^p} = 0.$$

12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích

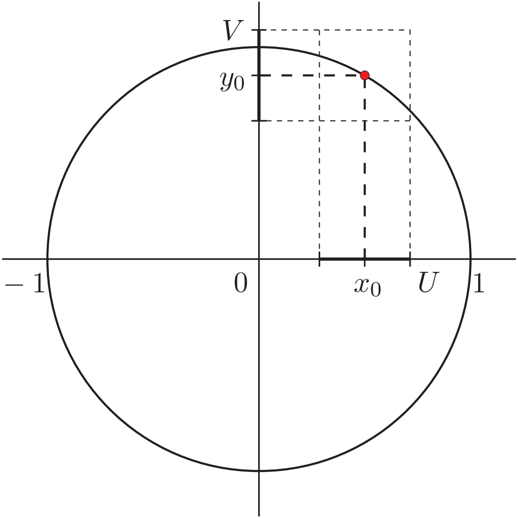




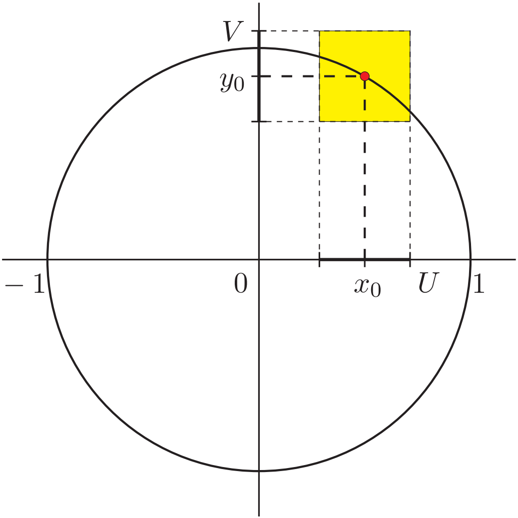
12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



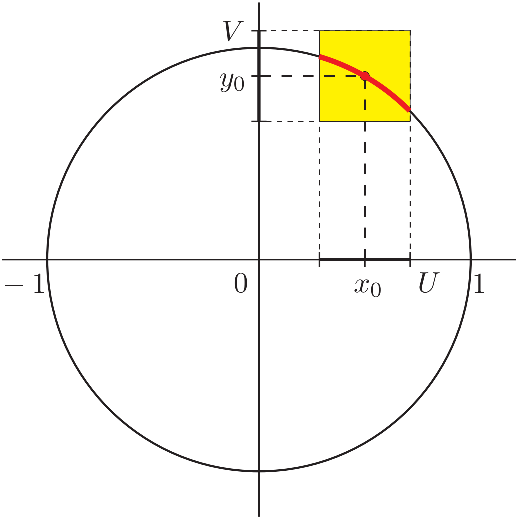
12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



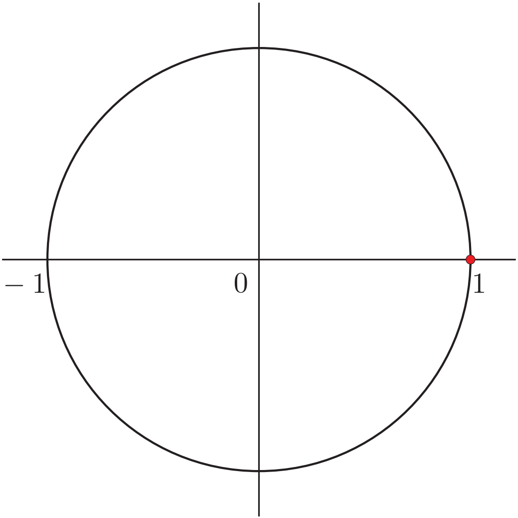
12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



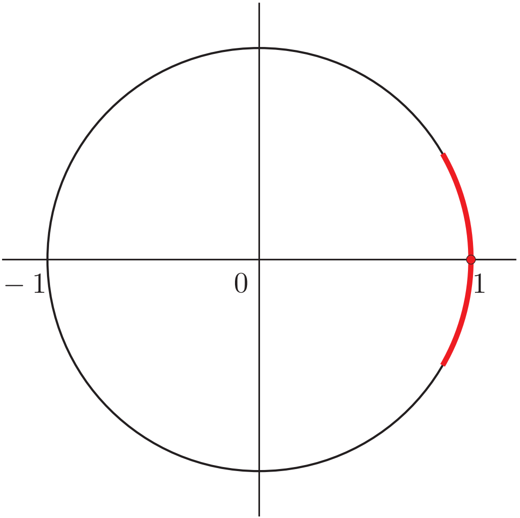
12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



Věta 12.24 (o implicitně zadané funkci)

Nechť $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích

Věta 12.24 (o implicitně zadané funkci)

Nechť $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích

Věta 12.24 (o implicitně zadané funkci)

Nechť $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,

Věta 12.24 (o implicitně zadané funkci)

Nechť $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F : G \to \mathbf{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

Věta 12.24 (o implicitně zadané funkci)

Nechť $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ *bodu* $\tilde{\boldsymbol{x}}$ *a okolí* $V \subset \mathbf{R}$ *bodu* $\tilde{y}$, *že pro každé* $\boldsymbol{x} \in U$ *existuje právě jedno* $y \in V$ *s vlastností* $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$.

Věta 12.24 (o implicitně zadané funkci)

Nechť $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ *bodu* $\tilde{\boldsymbol{x}}$ *a okolí* $V \subset \mathbf{R}$ *bodu* $\tilde{y}$, *že pro každé* $\boldsymbol{x} \in U$ *existuje právě jedno* $y \in V$ *s vlastností* $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$. *Označíme-li toto* y *jako* $\varphi(\boldsymbol{x})$, *pak* $\varphi \in \mathcal{C}^p(U)$

Věta 12.24 (o implicitně zadané funkci)

Nechť $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F\colon G \to \mathbf{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

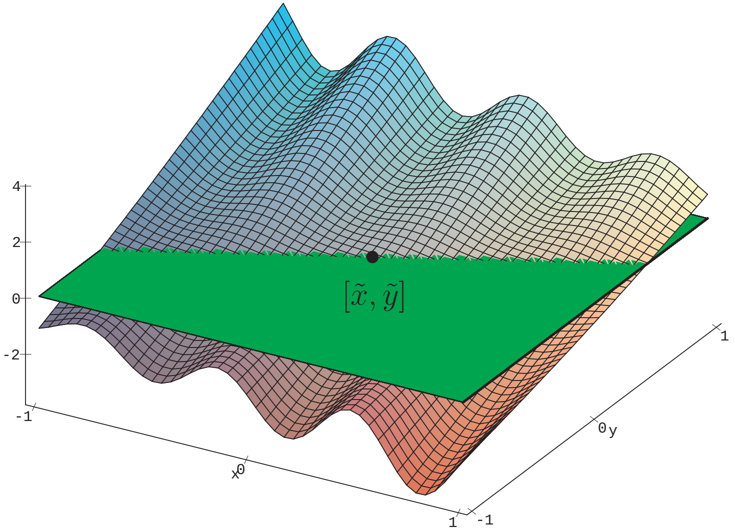
(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

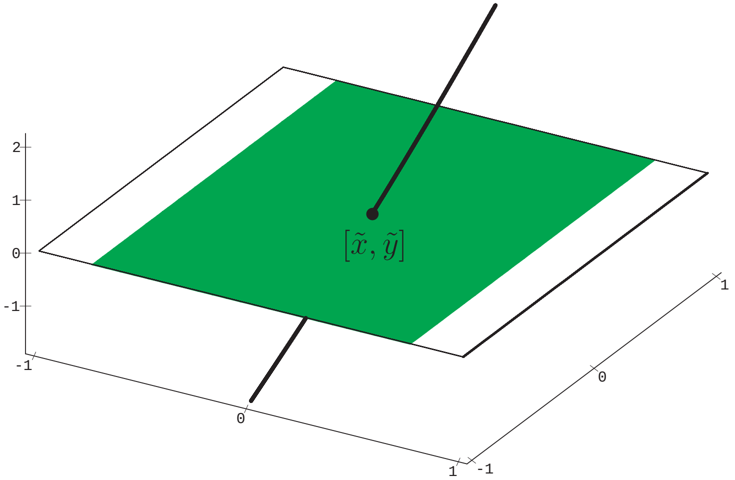
Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}$ bodu $\tilde{y}$, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$. Označíme-li toto y jako $\varphi(\boldsymbol{x})$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^p(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))}, \qquad \text{kde } j \in \{1, \ldots, n\},\ \boldsymbol{x} \in U.$$

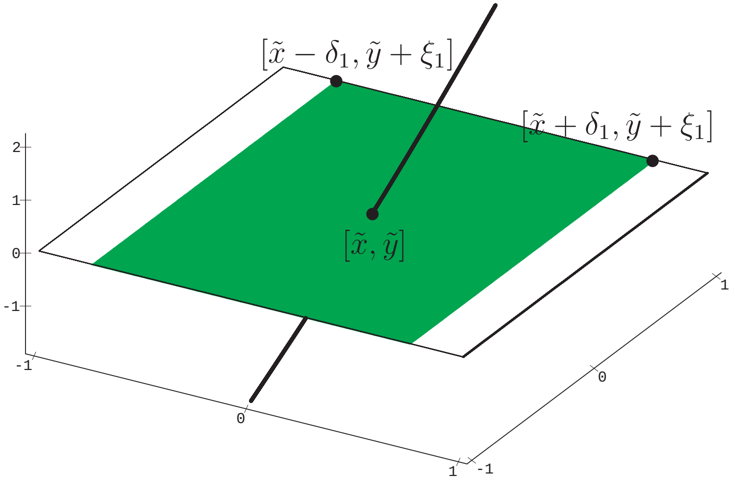
12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



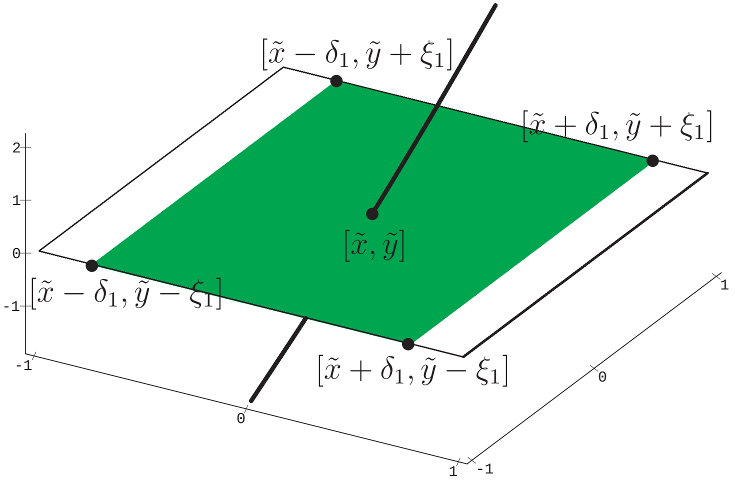
12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



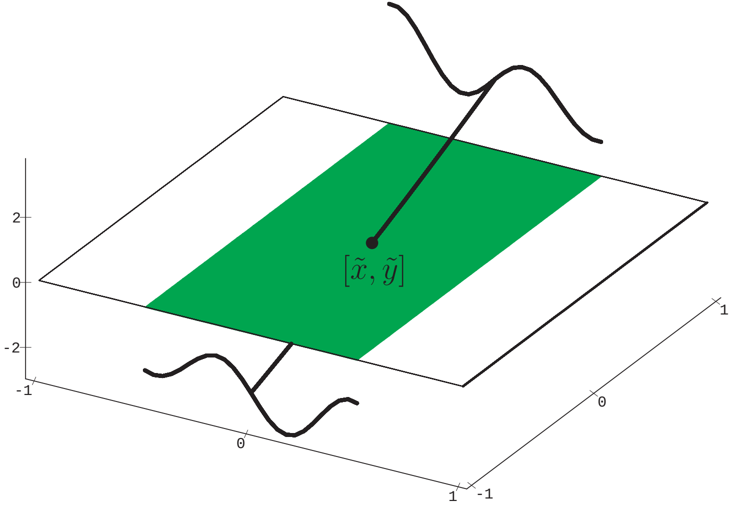
12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



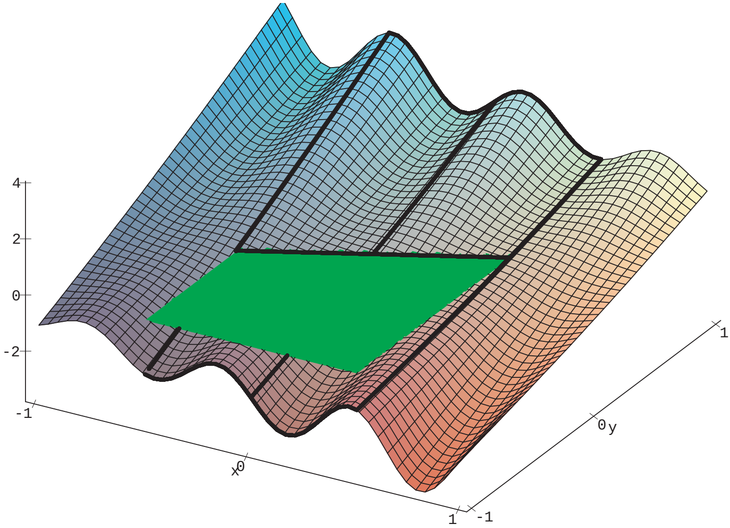
12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



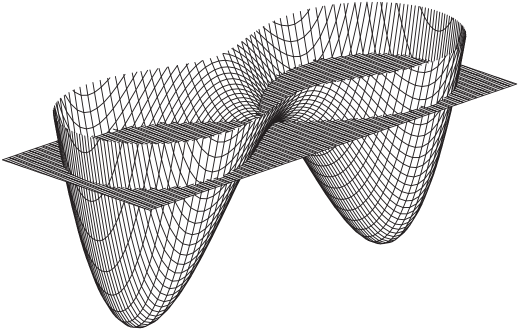
12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



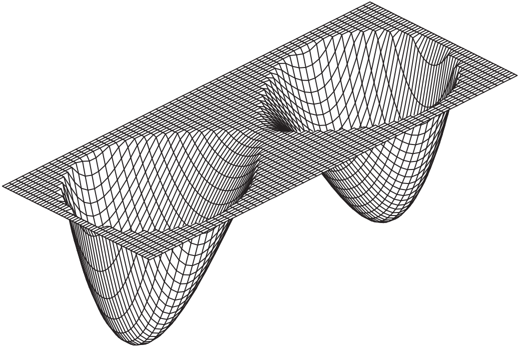
12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



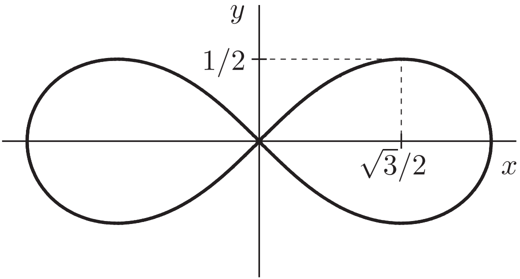
12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích



12.3 Věty o implicitně zadaných funkcích

Věta 12.25 (o implicitně zadaných funkcích)

Nechť $n, m \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. *Nechť* $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}^m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] \in G$ *a nechť platí:*

Věta 12.25 (o implicitně zadaných funkcích)

Nechť $n, m \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. *Nechť* $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}^m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

Věta 12.25 (o implicitně zadaných funkcích)

Nechť $n, m \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. *Nechť* $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}^m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{o}$,

Věta 12.25 (o implicitně zadaných funkcích)

Nechť $n, m \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. *Nechť* $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}^m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{o}$,

(iii)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Věta 12.25 (o implicitně zadaných funkcích)

Nechť $n, m \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. *Nechť* $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}^m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{o}$,

(iii)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ *bodu* $\tilde{\boldsymbol{x}}$ *a okolí* $V \subset \mathbf{R}^m$ *bodu* $\tilde{\boldsymbol{y}}$, *že pro každé* $\boldsymbol{x} \in U$ *existuje právě jedno* $\boldsymbol{y} \in V$ *s vlastností* $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}$.

Věta 12.25 (o implicitně zadaných funkcích)

Nechť $n, m \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F\colon G \to \mathbf{R}^m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] \in G$ a nechť platí:

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{o}$,

(iii)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}^m$ bodu $\tilde{\boldsymbol{y}}$, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} \in V$ s vlastností $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}$. Označíme-li toto $\boldsymbol{y}$ jako $\varphi(\boldsymbol{x})$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^p(U)$.

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $M \subset P$, $x \in M$ a f je funkce z P do **R** splňující $M \subset D(f)$.

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M : f(y) \leq f(x) \qquad (\text{resp. } \forall y \in M : f(y) \geq f(x)).$$

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $M \subset P$, $x \in M$ a f je funkce z P do **R** splňující $M \subset D(f)$.

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

  $$\forall y \in M : f(y) \leq f(x) \qquad (\text{resp. } \forall y \in M : f(y) \geq f(x)).$$

  Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M.

12.4 Extrémy funkcí více proměnných

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (resp. **lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x, \delta) \cap M \colon f(y) \leq f(x)$$

$$(\text{resp. } \forall y \in B(x, \delta) \cap M \colon f(y) \geq f(x)).$$

12.4 Extrémy funkcí více proměnných

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (resp. **lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x,\delta) \cap M \colon f(y) \leq f(x)$$

$$(\text{resp. } \forall y \in B(x,\delta) \cap M \colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem lokálního maxima** (resp. **lokálního minima**) funkce f na množině M.

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (resp. **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap M \colon f(y) < f(x)$$
$$(\text{resp. } \forall y \in (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap M \colon f(y) > f(x)).$$

12.4 Extrémy funkcí více proměnných

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (resp. **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap M \colon f(y) < f(x)$$

$$(\text{resp. } \forall y \in (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap M \colon f(y) > f(x)).$$

  Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (resp. **ostrého lokálního minima**) funkce f na množině M.

12.4 Extrémy funkcí více proměnných

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (resp. **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap M\colon f(y) < f(x)$$
$$(\text{resp. } \forall y \in (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap M\colon f(y) > f(x)).$$

  Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (resp. **ostrého lokálního minima**) funkce f na množině M.
- Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Věta 12.26

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor,* $M \subset P$ *je neprázdná kompaktní množina a* $f : M \to \mathbf{R}$ *je spojitá na* M. *Pak* f *nabývá na* M *svého maxima i minima.*

Věta 12.26

Nechť (P,ρ) *je metrický prostor,* $M \subset P$ *je neprázdná kompaktní množina a* $f\colon M \to \mathbf{R}$ *je spojitá na* M*. Pak* f *nabývá na* M *svého maxima i minima.*

Věta 12.27

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ *je otevřená,* $\boldsymbol{a} \in G$*,* $j \in \{1,\dots,n\}$*. Nechť funkce* $f\colon G \to \mathbf{R}$ *má v bodě* $\boldsymbol{a}$ *lokální extrém (vzhledem ke* G*).*

Věta 12.26

Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $M \subset P$ je neprázdná kompaktní množina a $f\colon M \to \mathbf{R}$ je spojitá na M. Pak f nabývá na M svého maxima i minima.

Věta 12.27

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $\boldsymbol{a} \in G$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Nechť funkce $f\colon G \to \mathbf{R}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém (vzhledem ke G). Pak buď $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ neexistuje nebo je rovna nule.

Lemma

Nechť $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *je pozitivně definitní kvadratická forma. Potom existuje* $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, *takové, že*

$$\forall \boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n : \; Q(\boldsymbol{h}) \geq \varepsilon ||\boldsymbol{h}||^2.$$

Věta 12.28 (postačující podmínky druhého řádu)

Budiž $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $\boldsymbol{a} \in G$ *a nechť* $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.

Věta 12.28 (postačující podmínky druhého řádu)

Budiž $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $\boldsymbol{a} \in G$ a nechť $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$. Potom platí:

- *Je-li kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního maxima.*

Věta 12.28 (postačující podmínky druhého řádu)

Budiž $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $\boldsymbol{a} \in G$ a nechť $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$. Potom platí:

- *Je-li kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního maxima.*
- *Je-li kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního minima.*

Věta 12.28 (postačující podmínky druhého řádu)

Budiž $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $\boldsymbol{a} \in G$ a nechť $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$. Potom platí:

- *Je-li kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního maxima.*
- *Je-li kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního minima.*
- *Je-li kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$ indefinitní, nenabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ani lokálního maxima, ani lokálního minima.*

Věta 12.29 (Lagrangeova věta o multiplikátorech)

Nechť $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$, $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$,

$$M = \{\boldsymbol{z} \in G;\ g_1(\boldsymbol{z}) = 0, g_2(\boldsymbol{z}) = 0, \dots, g_m(\boldsymbol{z}) = 0\}$$

a bod $\tilde{\boldsymbol{z}} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M.

Věta 12.29 (Lagrangeova věta o multiplikátorech)

Nechť $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$, $G \subset \mathbf{R}^n$ *je otevřená množina,* $f, g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$,

$$M = \{\boldsymbol{z} \in G;\ g_1(\boldsymbol{z}) = 0, g_2(\boldsymbol{z}) = 0, \ldots, g_m(\boldsymbol{z}) = 0\}$$

a bod $\tilde{\boldsymbol{z}} \in M$ *je bodem lokálního extrému funkce* f *vzhledem k množině* M. *Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(I) *vektory* $\nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}), \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}), \ldots, \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}})$ *jsou lineárně závislé,*

Věta 12.29 (Lagrangeova věta o multiplikátorech)

Nechť $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$, $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$,

$$M = \{\boldsymbol{z} \in G;\ g_1(\boldsymbol{z}) = 0, g_2(\boldsymbol{z}) = 0, \dots, g_m(\boldsymbol{z}) = 0\}$$

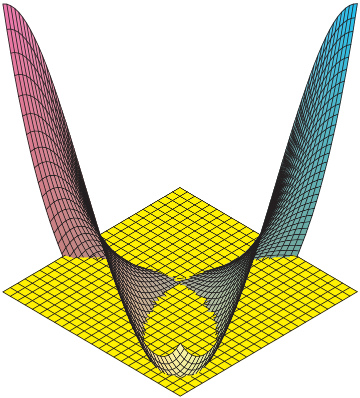
a bod $\tilde{\boldsymbol{z}} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) *vektory $\nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}), \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}), \dots, \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}})$ jsou lineárně závislé,*

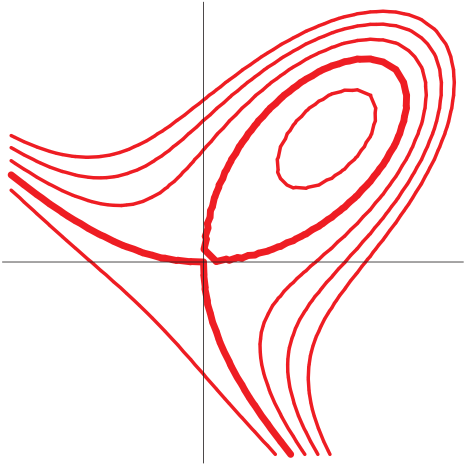
(II) *existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$ splňující*

$$\nabla f(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{o}.$$

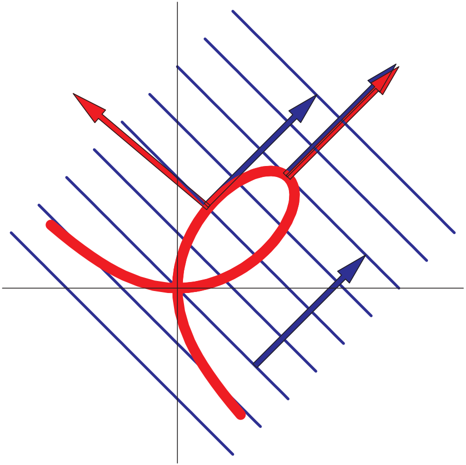
12.4 Extrémy funkcí více proměnných



12.4 Extrémy funkcí více proměnných



12.4 Extrémy funkcí více proměnných



Definice

Řekneme, že zobrazení f z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$ je **difeomorfismus** na otevřené množině $U \subset \mathbf{R}^n$, jestliže

(i) f je prosté na U,

12.5. Regulární zobrazení

Definice

Řekneme, že zobrazení f z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$ je **difeomorfismus** na otevřené množině $U \subset \mathbf{R}^n$, jestliže

(i) f je prosté na U,

(ii) $W = f(U)$ je otevřená podmnožina prostoru $\mathbf{R}^n$,

12.5. Regulární zobrazení

Definice

Řekneme, že zobrazení f z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$ je **difeomorfismus** na otevřené množině $U \subset \mathbf{R}^n$, jestliže

(i) f je prosté na U,

(ii) $W = f(U)$ je otevřená podmnožina prostoru $\mathbf{R}^n$,

(iii) $f \in \mathcal{C}^1(U)$,

12.5. Regulární zobrazení

Definice

Řekneme, že zobrazení f z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$ je **difeomorfismus** na otevřené množině $U \subset \mathbf{R}^n$, jestliže

(i) f je prosté na U,

(ii) $W = f(U)$ je otevřená podmnožina prostoru $\mathbf{R}^n$,

(iii) $f \in \mathcal{C}^1(U)$,

(iv) $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(W)$.

12.5. Regulární zobrazení

Definice

Řekneme, že zobrazení f z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$ je **difeomorfismus** na otevřené množině $U \subset \mathbf{R}^n$, jestliže

(i) f je prosté na U,

(ii) $W = f(U)$ je otevřená podmnožina prostoru $\mathbf{R}^n$,

(iii) $f \in \mathcal{C}^1(U)$,

(iv) $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(W)$.

Věta 12.30 (o lokálním difeomorfismu)

Nechť f je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na jistém okolí V bodu $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ a $f'(\mathbf{a})$ je regulární. Pak existuje otevřená množina $U \subset V$ obsahující bod $\mathbf{a}$ taková, že zobrazení $f|_U$ je difeomorfismus na U.

12.5. Regulární zobrazení

Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Zobrazení $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ je **regulární**, jestliže

(i) $f \in \mathcal{C}^1(G)$,

12.5. Regulární zobrazení

Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Zobrazení $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ je **regulární**, jestliže

(i) $f \in \mathcal{C}^1(G)$,

(ii) jacobián zobrazení f je nenulový v každém bodě množiny G.

12.5. Regulární zobrazení

Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Zobrazení $f : G \to \mathbf{R}^n$ je **regulární**, jestliže

(i) $f \in \mathcal{C}^1(G)$,

(ii) jacobián zobrazení f je nenulový v každém bodě množiny G.

Věta 12.31

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení. Pak f je difeomorfismus, právě když f je regulární a prosté.