11 Metrické prostory I (pokračování)

11.3 Spojitá zobrazení

Definice. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $a \in P$ a $M \subset P$. Řekneme, že

- f je **spojité v bodě** a **vzhledem k množině** M, jestliže $a \in M$ a platí
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \; \forall x \in M\colon \; \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$
- f je **spojité v bodě** a, jestliže je spojité v a vzhledem k P,
- f je **spojité na** M, jestliže je spojité v každém bodě $b \in M$ vzhledem k M,
- f je **spojité**, jestliže je spojité na P.

Věta 11.7 (charakterizace spojitosti)**.** *Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f : P \to Q$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(i) *Zobrazení f je spojité.*

(ii) *Pro každou otevřenou množinu G v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (P, ρ).*

(iii) *Pro každou uzavřenou množinu F v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (P, ρ).*

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $x \in X$. Řekneme, že x je **hromadným bodem množiny** M, jestliže
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\colon \; M \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$
Množinu všech hromadných bodů množiny M značíme M' a nazýváme ji **derivací množiny** M. Body z $M \setminus M'$ nazýváme **izolovanými body množiny** M.

Definice. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y, $A \subset X$ a nechť $a \in X$ je hromadným bodem množiny A. Řekneme, že prvek $b \in Y$ je **limitou zobrazení** f **v bodě** a **vzhledem k množině** A, jestliže platí
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \; \forall x \in A, x \neq a\colon \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$
Je-li $A = X$, říkáme, že f má v bodě a **limitu** b.

Označení. Pokud limita f v bodě a vzhledem k A existuje, pak ji značíme $\lim_{x \to a, x \in A} f(x)$. Místo $\lim_{x \to a, x \in X} f(x)$ píšeme jen $\lim_{x \to a} f(x)$.

Věta 11.8 (Heineova věta)**.** *Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y, $A \subset \mathcal{D}(f)$, $a \in A'$, $b \in Y$. Potom jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,

(ii) *pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim x_n = a$ platí $\lim f(x_n) = b$.*

Věta 11.9 (spojitost složeného zobrazení v bodě). *Nechť* (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z. *Nechť* $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B$,
- f *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A,
- g *je spojité v bodě* $f(a)$ *vzhledem k* B.

Pak zobrazení $g \circ f$ *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A.

Věta 11.10 (spojitosti složeného zobrazení). *Nechť* (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* $f : X \to Y$ *a* $g : Y \to Z$ *jsou spojitá zobrazení. Pak zobrazení* $g \circ f : X \to Z$ *je spojité.*

Věta 11.11 (limita složeného zobrazení). *Nechť* (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z. *Nechť* $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f((A \cap B(a, \delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,
- $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,
- $\lim_{y \to b, y \in B} g(y) = c$.

Pokud dále platí jedna z podmínek

(P) *existuje* $\eta \in \mathbf{R}, \eta > 0$, *takové, že pro každé* $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, *platí* $f(x) \neq b$,

(S) *zobrazení* g *je spojité v bodě* b *vzhledem k* B,

pak $\lim_{x \to a, x \in A} g \circ f(x) = c$.

Definice. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$. Řekneme, že zobrazení f je **homeomorfismus**, jestliže je prosté a na, je spojité a f^{-1} je také spojité. Řekneme, že prostory (X, ρ) a (Y, σ) jsou **homeomorfní**, jestliže existuje bijekce $g : X \to Y$, která je homeomorfismem.