11. Metrické prostory I (pokračování)

11.3 Spojitá zobrazení

11.3 Spojitá zobrazení

Definice

Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $a \in P$ a $M \subset P$.

11.3 Spojitá zobrazení

Definice

Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $a \in P$ a $M \subset P$.
Řekneme, že

- f je **spojité v bodě** a **vzhledem k množině** M, jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \ \forall x \in M : \\ \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$

11.3 Spojitá zobrazení

Definice

Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $a \in P$ a $M \subset P$.
Řekneme, že

- f je **spojité v bodě** a **vzhledem k množině** M, jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \; \forall x \in M : \\ \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$

- f je **spojité v bodě** a, jestliže je spojité v a vzhledem k P,

11.3 Spojitá zobrazení

- f je **spojité na** M, jestliže je spojité v každém bodě $b \in M$ vzhledem k M,

11.3 Spojitá zobrazení

- f je **spojité na M**, jestliže je spojité v každém bodě $b \in M$ vzhledem k M,
- f je **spojité**, jestliže je spojité na P.

11.3 Spojitá zobrazení

Věta 11.7 (charakterizace spojitosti)

Nechť (P, ρ) *a* (Q, σ) *jsou metrické prostory,* $f : P \to Q$*. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(i) *Zobrazení* f *je spojité.*

Věta 11.7 (charakterizace spojitosti)

Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f : P \to Q$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) *Zobrazení f je spojité.*

(ii) *Pro každou otevřenou množinu G v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (P, ρ).*

Věta 11.7 (charakterizace spojitosti)

Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f : P \to Q$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) *Zobrazení f je spojité.*

(ii) *Pro každou otevřenou množinu G v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (P, ρ).*

(iii) *Pro každou uzavřenou množinu F v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (P, ρ).*

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $x \in X$.

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $x \in X$. Řekneme, že x je **hromadným bodem množiny** M, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \colon \; M \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M značíme M' a nazýváme ji **derivací množiny** M. Body z $M \setminus M'$ nazýváme **izolovanými body množiny** M.

11.3 Spojitá zobrazení

Definice

Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y, $A \subset X$ a nechť $a \in X$ je hromadným bodem množiny A.

Definice

Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y, $A \subset X$ a nechť $a \in X$ je hromadným bodem množiny A. Řekneme, že prvek $b \in Y$ je **limitou zobrazení** f **v bodě** a **vzhledem k množině** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$$
$$\forall x \in A, x \neq a\colon \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Definice

Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y, $A \subset X$ a nechť $a \in X$ je hromadným bodem množiny A. Řekneme, že prvek $b \in Y$ je **limitou zobrazení f v bodě a vzhledem k množině A**, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \quad \forall x \in A, x \neq a \colon \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Je-li $A = X$, říkáme, že f má v bodě a **limitu** b.

Označení

Pokud limita f v bodě a vzhledem k A existuje, pak ji značíme $\lim_{x \to a, x \in A} f(x)$.

Označení

Pokud limita f v bodě a vzhledem k A existuje, pak ji značíme $\lim_{x\to a, x\in A} f(x)$. Místo $\lim_{x\to a, x\in X} f(x)$ píšeme jen $\lim_{x\to a} f(x)$.

Věta 11.8 (Heineova věta)

Nechť (X, ρ) *a* (Y, σ) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y, $A \subset \mathcal{D}(f)$, $a \in A'$, $b \in Y$.

Věta 11.8 (Heineova věta)

Nechť (X, ρ) *a* (Y, σ) *jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y,* $A \subset \mathcal{D}(f)$, $a \in A'$, $b \in Y$. *Potom jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,

(ii) *pro každou posloupnost* $\{x_n\}$ *prvků množiny* $A \setminus \{a\}$ *splňující* $\lim x_n = a$ *platí* $\lim f(x_n) = b$.

Věta 11.9 (spojitost složeného zobrazení v bodě)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z*. Nechť* $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B$,

11.3 Spojitá zobrazení

Věta 11.9 (spojitost složeného zobrazení v bodě)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z. *Nechť* $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B$,
- f *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A,

Věta 11.9 (spojitost složeného zobrazení v bodě)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z*. Nechť* $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B$,
- f *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A,
- g *je spojité v bodě* $f(a)$ *vzhledem k* B.

Věta 11.9 (spojitost složeného zobrazení v bodě)

Nechť (X,ρ), (Y,σ) *a* (Z,ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z*. Nechť* $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f(B(a,\delta) \cap A) \subset B$,
- f *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A,
- g *je spojité v bodě* $f(a)$ *vzhledem k* B.

Pak zobrazení $g \circ f$ *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A.

Věta 11.10 (spojitosti složeného zobrazení)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* $f : X \to Y$ *a* $g : Y \to Z$ *jsou spojitá zobrazení. Pak zobrazení* $g \circ f : X \to Z$ *je spojité.*

11.3 Spojitá zobrazení

Věta 11.11 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z.

Věta 11.11 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X,ρ), (Y,σ) *a* (Z,ω) *jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť* $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f((A \cap B(a,\delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,

Věta 11.11 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X,ρ), (Y,σ) *a* (Z,ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z. *Nechť* $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f((A \cap B(a,\delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,
- $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,

Věta 11.11 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X,ρ), (Y,σ) *a* (Z,ω) *jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť* $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f((A \cap B(a,\delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,
- $\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = b$,
- $\lim_{y\to b, y\in B} g(y) = c$.

Věta 11.11 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X,ρ), (Y,σ) a (Z,ω) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť $A\subset X$, $a\in A'$, $B\subset Y$, $b\in B'$, $c\in Z$ a platí:

- *existuje $\delta\in\mathbf{R}$, $\delta>0$, takové, že $f((A\cap B(a,\delta))\setminus\{a\})\subset B$,*
- $\lim_{x\to a, x\in A} f(x)=b$,
- $\lim_{y\to b, y\in B} g(y)=c$.

Pokud dále platí jedna z podmínek

(P) *existuje $\eta\in\mathbf{R}, \eta>0$, takové, že pro každé $x\in B(a,\eta)\cap A$, $x\neq a$, platí $f(x)\neq b$,*

Věta 11.11 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť* $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f((A \cap B(a, \delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,
- $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,
- $\lim_{y \to b, y \in B} g(y) = c$.

Pokud dále platí jedna z podmínek

(P) *existuje* $\eta \in \mathbf{R}, \eta > 0$, *takové, že pro každé* $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, *platí* $f(x) \neq b$,

(S) *zobrazení g je spojité v bodě b vzhledem k B,*

Věta 11.11 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X,ρ), (Y,σ) a (Z,ω) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a platí:

- *existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f((A \cap B(a,\delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,*
- $\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = b$,
- $\lim_{y\to b, y\in B} g(y) = c$.

Pokud dále platí jedna z podmínek

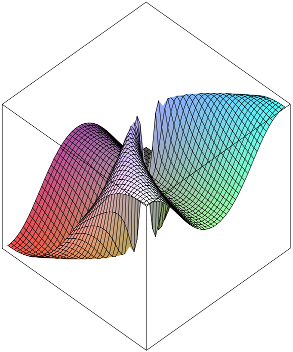
(P) *existuje $\eta \in \mathbf{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in B(a,\eta) \cap A$, $x \neq a$, platí $f(x) \neq b$,*

(S) *zobrazení g je spojité v bodě b vzhledem k B,*

pak $\lim_{x\to a, x\in A} g \circ f(x) = c$.

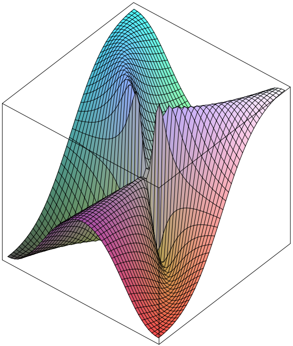
11.3 Spojitá zobrazení

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$



11.3 Spojitá zobrazení

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$



11.3 Spojitá zobrazení

Definice

Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$. Řekneme, že zobrazení f je **homeomorfismus**, jestliže je prosté a na, je spojité a f^{-1} je také spojité. Řekneme, že prostory (X, ρ) a (Y, σ) jsou **homeomorfní**, jestliže existuje bijekce $g : X \to Y$, která je homeomorfismem.