Bonusová úloha číslo 1

Nechť K je neprázdná kompaktní podmnožina množiny komplexních čísel. Existuje vždy $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ takový, že $\sigma(T) = K$?

Odpověď je kladná. Pro danou neprázdnou kompaktní množinu $K \subset \mathbb{C}$ stačí nalézt množinu $\{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ obsaženou v K, jejíž uzávěr je roven K. Potom zkonstruujeme zobrazení T předpisem

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \dots).$$

Nyní je třeba ukázat, že L je spojitý lineární operátor z ℓ^2 do ℓ^2. Vzhledem k tomu, že platí $\sigma_p(T) = \{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ dostáváme $\overline{\{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}} = K \subset \sigma(T)$. K dokončení důkazu zbývá ověřit, že T nemá mimo K žádné prvky spektra.