FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA I

1. Spektrální poloměr
2. Operátory na Hilbertových prostorech
3. Vektorová integrace
4. Analytický kalkulus
5. Spojitý kalkulus
6. Borelovský kalkulus
7. Spektrální rozklad normálního operátoru
8. Distribuce - základní pojmy
9. Fourierova transformace
10. Temperované distribuce

1. Spektrální poloměr

DEFINICE

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. Spektrální poloměr operátoru T je definován předpisem

$$r(T) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(T)\}.$$

VĚTA 1 (Beurling)

Nechť X je komplexní Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Potom $r(T) = \lim \|T^n\|^{1/n}$.

DŮKAZ

$r(T) \leq \underline{\lim}\, \|T^n\|^{1/n}$

Pro $\lambda \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(\lambda I - T)(\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} T + \dots + T^{n-1}) =$$
$$= \lambda I(\lambda^{n-1} I + \dots + T^{n-1}) - T(\lambda^{n-1} I + \dots + T^{n-1})$$
$$= \lambda^n I + \dots + \lambda T^{n-1} - \lambda^{n-1} T - \dots - T^n = \lambda^n I - T^n$$

Dohromady máme

$$\lambda^n I - T^n = (\lambda I - T)(\lambda^{n-1} I + \dots + T^{n-1}) \quad \text{a obdobně} \qquad (1)$$
$$\lambda^n I - T^n = (\lambda^{n-1} I + \dots + T^{n-1})(\lambda I - T). \qquad (2)$$

Pokud $\lambda \in \sigma(T)$, potom buď $\lambda I - T$ není na, a tedy $\lambda^n I - T^n$ není na podle (1), nebo $\lambda I - T$ není prostý, a tedy $\lambda^n I - T^n$ není prostý podle (2). Máme tedy $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z VĚTY 10.3 (UFA) máme $|\lambda^n| \leq \|T^n\|$, takže $|\lambda| \leq \|T^n\|^{1/n}$. Odtud $|\lambda| \leq \underline{\lim}\, \|T^n\|^{1/n}$, a tedy $\varrho(T) \leq \underline{\lim}\, \|T^n\|^{1/n}$.

$r(T) \geq \overline{\lim}\, \|T^n\|^{1/n}$

Pro $\varphi \in \mathcal{L}(X)^*$ definujeme $f_\varphi : \varrho(T) \to \mathbb{C}$ předpisem

$$f_\varphi(\lambda) = \varphi\left((\lambda I - T)^{-1}\right).$$

V UFA jsme si odvodili (důkaz VĚTY 10.3), že pro $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > \|T\|$ platí

$$f_\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} \varphi(T^n), \qquad (*)$$

a také $f_\varphi \in H(\varrho(T))$. Odtud plyne, že $(*)$ platí pro $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > r(T)$.

Je-li φ a $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > r(T)$, pevné, pak je posloupnost $\{\varphi(\lambda^{-(n+1)} T^n)\}$

omezená, neboť konverguje k 0. Z principu stejnoměrné omezenosti (VĚTA 8.2 UFA) plyne omezenost posloupnosti $\{\lambda^{-(n+1)}T^n\}$ v $\mathcal{L}(X)$. Potom tedy existuje $C>0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\|\lambda^{-(n+1)}T^n\| \leq C,$$

$$\|T^n\| \leq C|\lambda|^{n+1},$$

$$\|T^n\|^{1/n} \leq C^{\frac{1}{n}}|\lambda|^{1+\frac{1}{n}}$$

Odtud plyne $\overline{\lim}\,\|T^n\|^{1/n} \leq |\lambda|$. Potom ale také $\overline{\lim}\,\|T^n\|^{1/n} \leq r(T)$.

Z právě dokázaných nerovností plyne $\lim \|T^n\|^{1/n} = r(T)$. ∎

2. Operátory na Hilbertových prostorech

ÚMLUVA

V tomto oddíle H bude značit komplexní Hilbertův prostor.

DEFINICE

Řekneme, že $T \in \mathcal{L}(H)$ je

- normální, pokud $TT^* = T^*T$,
- samoadjungovaný, pokud $T = T^*$ (= hermiteovský),
- unitární, pokud $TT^* = T^*T = I$,
- ortogonální projekce, pokud T je projekce a $\mathrm{Rng}\,T \perp \mathrm{Ker}\,T$.

POZOROVÁNÍ

1) samoadjungovaný $\Rightarrow$ normální

unitární $\Rightarrow$ normální

ortogonální projekce $\Rightarrow$ samoadjungovaný (bude později)

2) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ $\quad Tx = Ax \quad T^*x = \bar{A}^T x$

- normální: $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$
- unitární: $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A = I$, tj. $A^{-1} = \bar{A}^T$.

LEMMA 2.1

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom

(i) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$;

(ii) $\mathrm{Ker}\,T^* = \mathrm{Rng}\,T^\perp$.

DŮKAZ

(i) $\leq$ Víme, že $\|T\| = \|T^*\|$ (VĚTA 9.3 UFA). Potom $\|TT^*\| \leq \|T\| \cdot \|T^*\| = \|T\|^2$ a $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$.

$\geq$ Nechť $x \in H$, $\|x\| \leq 1$. Potom platí

$$\|Tx\|^2 = |(Tx, Tx)| = |(T^*Tx, x)| \leq \|T^*Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T^*Tx\| \leq \|T^*T\|.$$

Odtud máme $\|Tx\| \leq \|T^*T\|^{1/2}$ pro libovolné $x \in B_H$, a tedy $\|T\| \leq \|T^*T\|^{1/2}$.

Dále $\|T\| = \|T^*\| \leq \|T^{**}T^*\|^{1/2} = \|TT^*\|^{1/2}$.

(ii) Pro $x \in \operatorname{Ker} T^*$ a $y \in H$ platí $(x, Ty) = (T^*x, y) = (0, y) = 0$, takže $\operatorname{Ker} T^* \subseteq \operatorname{Rng} T^{\perp}$. Pokud $x \in \operatorname{Rng} T^{\perp}$, pak $(x, TT^*x) = (T^*x, T^*x) = 0$, takže $T^*x = 0$. ∎

LEMMA 2.2

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak je ekvivalentní:

(i) $T = 0$,

(ii) $\forall x \in H: (Tx, x) = 0$.

DŮKAZ

(i) => (ii) Zřejmé.

(ii) => (i) Pro libovolná $x, y \in H$ platí

$$0 = (T(x+y), x+y) = (Tx, x) + (Tx, y) + (Ty, x) + (Ty, y) \qquad (*)$$
$$= (Tx, y) + (Ty, x).$$

Do (*) dosadíme místo y prvek iy. Dostaneme

$$0 = (Tx, iy) + (Tiy, x) = -i(Tx, y) + i(Ty, x).$$

Odtud

$$0 = (Tx, y) - (Ty, x).$$

Dohromady pak s (*) dostaneme $(Tx, y) = 0$. Pro $y = Tx$, pak máme $(Tx, Tx) = \|Tx\|^2 = 0$ pro libovolné $x \in H$. ∎

DŮSLEDEK 2.3

Nechť $S, T \in \mathcal{L}(H)$ pro každé $x \in H$ splňují $(Sx, x) = (Tx, x)$. Potom $S = T$.

DŮKAZ

Operátor $S - T$ splňuje $((S-T)x, x) = 0$ pro každé $x \in H$, a tedy $S = T$ podle VĚTY 2.1. ∎

VĚTA 2.4 (charakterisace normálních operátorů)

Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální, právě když $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pro každé $x \in H$.

DŮKAZ

$\Rightarrow$ Platí $\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^*Tx) = (x, TT^*x) = (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2$.

$\Leftarrow$ Pro libovolné $x \in H$ platí

$$\begin{array}{c} (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \\ \| \\ (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x). \end{array}$$

DŮSLEDEK 2.2 dává $T^*T = TT^*$. ∎

KONEC 1. PŘEDNÁŠKY, 23.2.2011

VĚTA 2.5 (vlastnosti normálních operátorů)

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Potom platí:

(1) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$,

(2) (Weyl) T je invertovatelný, právě když T je zdola omezený, tj. $\exists c > 0\ \forall x \in H: \|Tx\| \geq c\|x\|$,

(3) pokud $x \in H, \lambda \in \mathbb{C}$ splňují $Tx = \lambda x$, potom $T^*x = \bar{\lambda} x$,

(4) pokud $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(T), \lambda_1 \neq \lambda_2$, potom $\operatorname{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \operatorname{Ker}(\lambda_2 I - T)$,

(5) $\|T^2\| = \|T\|^2$,

(6) $\|T\| = r(T)$.

DŮKAZ

(1) Platí $\|Tx\| = 0 \Leftrightarrow \|T^*x\| = 0$ podle VĚTY 2.3. Máme tedy $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$.

(2) Pokud je T invertovatelný, tj. T je izomorfismus H na H, potom je T zdola omezený podle VĚTY 3.3 UFA. Pokud je T zdola omezený, pak jde podle téže věty o izomorfismus H na $\operatorname{Rng} T$. Platí tedy $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Potom podle LEMMATU 2.1 (ii) a (1) máme $\operatorname{Rng} T^\perp = \operatorname{Ker} T^* = \operatorname{Ker} T = \{0\}$, takže $\overline{\operatorname{Rng} T} = H$. Podprostor $\operatorname{Rng} T$ je Banachův (VĚTA 3.5 UFA), a tedy $\operatorname{Rng} T = H$. Operátor T je tedy prostý a na, takže je invertovatelný.

(3) Platí $(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda} I - T^*$ (VĚTA 9.3(ii) UFA), a tedy $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \overset{(1)}{=} \operatorname{Ker}(\lambda I - T)^* = \operatorname{Ker}(\bar{\lambda} I - T^*)$.

(4) Mějme $x, y \in H$ splňující $Tx = \lambda_1 x$ a $Ty = \lambda_2 y$. Potom

$$\lambda_1 (x,y) = (\lambda_1 x, y) = (Tx, y) = (x, T^* y) = (x, \bar{\lambda}_2 y) = \lambda_2 (x,y).$$

Poněvadž $\lambda_1 \neq \lambda_2$, musí být $(x,y) = 0$.

(5) $\|T^2\|^2 = \|(T^2)^* T^2\| = \|T^* T^* T T\| = \|T^* T T^* T\| = \|(T^* T)^* T^* T\| = \|T^* T\|^2$
$= \|T\|^4$.

(6) Podle (5) platí $\|T^{2^m}\| = \|T\|^{2^m}$, $m \in \mathbb{N}$. Podle VĚTY 1.1. pak máme

$$r(T) = \lim_n \|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|T\|.$$

■

<u>VĚTA 2.6</u> (charakterizace samoadjungovaných operátorů)
Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom $T = T^*$, právě když (Tx, x) je reálné číslo pro každé $x \in H$.

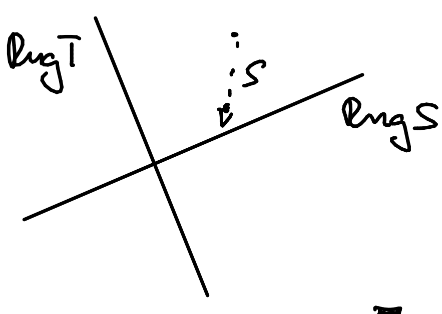
DŮKAZ

⇒ $(Tx, x) = (x, T^* x) \underset{T = T^*}{=} (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$ → $(Tx, x) \in \mathbb{R}$

⇐ $(Tx, x) = (x, Tx) = (T^* x, x)$ $\underset{\text{DŮSLEDEK 2.3}}{\Rightarrow}$ $T = T^*$

■

<u>VĚTA 2.7</u>
Nechť $S, T \in \mathcal{L}(H)$ a S je samoadjungovaný. Pak $\operatorname{Rng} S \perp \operatorname{Rng} T$, právě když $ST = 0$.



DŮKAZ

⇒ $(STx, y) = (Tx, Sy) = 0$ ⇒ $STx = 0$

⇐ $(Tx, Sy) = (STx, y) = (0, y) = 0$ ⇒ $\operatorname{Rng} T \perp \operatorname{Rng} S$

■

VĚTA 2.8

Pro každé $T \in \mathcal{L}(H)$ existuje právě jeden rozklad $T = S_1 + iS_2$, kde S_1, S_2 jsou samoadjungované operátory.

DŮKAZ

Existence. Položme $S_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$, $S_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$. Potom

- $S_1 + iS_2 = \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*) = T$,
- $S_1^* = \frac{1}{2}(T^* + T^{**}) = \frac{1}{2}(T^* + T) = S_1$,
- $S_2^* = \frac{1}{\overline{2i}}(T^* - T^{**}) = -\frac{1}{2i}(T^* - T) = S_2$.

Jednoznačnost. Máme-li nyní

$$T = S_1 + iS_2 = L_1 + iL_2 \qquad (S_1, L_1, S_2, L_2 \text{ ... samoadjungované}),$$

pak $S_1 - L_1 = i(L_2 - S_2)$, a tedy

$$\underbrace{((S_1 - L_1)x, x)}_{\in \mathbb{R}} = i\underbrace{((L_2 - S_2)x, x)}_{\in \mathbb{R}}, \; x \in X.$$

VĚTA 2.6

Odtud $((S_1 - L_1)x, x) = ((L_2 - S_2)x, x) = 0$ (VĚTA 2.1), a tedy $S_1 = L_1$, $S_2 = L_2$. ∎

DEFINICE

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Numerický range operátoru T je definován předpisem

$$N(T) = \{(Tx, x);\ x \in S_H\}.$$

VĚTA 2.9 (Hilbert-Toeplitz)

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom $\sigma(T) \subseteq \overline{N(T)}$.

DŮKAZ

Nechť $\lambda \in \sigma(T)$. Potom $\lambda I - T$ není prostý nebo není na. V prvním případě existuje $x \in S_X$ takové, že $Tx = \lambda x$, a tedy $(Tx, x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2 = \lambda \in N(T) \subseteq \overline{N(T)}$. Pokud $\lambda I - T$ není na, pak rozlišíme dvě možnosti:

- $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ není hustý. Potom platí $\{0\} \neq \operatorname{Rng}(\lambda I - T)^{\perp} = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)^{*} = \operatorname{Ker}(\bar{\lambda} I - T^{*})$, takže existuje $x \in S_H$ splňující $T^{*}x = \bar{\lambda} x$. Potom $(Tx, x) = (x, T^{*}x) = (x, \bar{\lambda} x) = \lambda$, takže $\lambda \in N(T)$
- $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je hustý. Potom $\lambda I - T$ není zdola omezený (viz VĚTA 3.3 a 3.5 UFA), takže existuje posloupnost $(x_n) \subset S_H$ splňující $\|\lambda x_n - T x_n\| \to 0$. Potom $(\lambda x_n - T x_n, x_n) \to 0$, a tedy $(T x_n, x_n) \to \lambda$. Odtud $\lambda \in \overline{N(T)}$. ∎

<u>VĚTA 2.10</u> (spektrum samoadjungovaného operátoru)
Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je samoadjungovaný. Potom $N(T) \subset \mathbb{R}$ a označíme-li $m_T = \inf N(T)$, $M_T = \sup N(T)$, pak platí

(1) $\sigma(T) \subseteq [m_T, M_T]$,

(2) $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$,

(3) $m_T, M_T \in \sigma(T)$.

DŮKAZ

(1) Inkluze $\sigma(T) \subseteq [m_T, M_T]$ plyne z VĚT 2.6 a 2.9.

(2) Podle VĚTY 2.5.6 máme $\|T\| = r(T)$, takže s použitím (1) dostáváme $\|T\| \in \sigma(T)$ nebo $-\|T\| \in \sigma(T)$.

KONEC 2. PŘEDNÁŠKY, 2.3.2011

(3) Platí $\sigma(T) \subseteq [m_T, M_T] \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$. Potom podle (2) m_T nebo M_T leží v $\sigma(T)$. Předpokládejme, že nastává první případ. Potom je operátor $S = T - m_T I$ samoadjungovaný a platí $(Sx, x) = (Tx, x) - m_T$, $x \in S_H$. Máme tedy $m_S = 0$, $M_S = M_T - m_T$. Podle již dokázaného dostáváme $M_T - m_T \in \sigma(S)$, a tedy $M_T \in \sigma(T)$ $\left(M_T I - T = (M_T - m_T) I - S \right)$.
Nastává-li druhý případ, potom položíme $S = T - M_T I$ a postupujeme stejně. ∎

VĚTA 2.11 (charakterizace unitárních operátorů)

Nechť $U \in \mathcal{L}(H)$. Potom je ekvivalentní:

(i) U je unitární,

(ii) $\operatorname{Rng} U = H$ a $(Ux, Uy) = (x, y)$, $x, y \in H$,

(iii) $\operatorname{Rng} U = H$ a $\|Ux\| = \|x\|$, $x \in H$.

DŮKAZ

(i) => (ii) $\operatorname{Rng} U = H$ zřejmě platí. Pro $x, y \in H$ máme $(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y)$.

(ii) => (iii) $\operatorname{Rng} U = H$ zřejmě platí. Pro $x \in H$ máme $\|Ux\|^2 = (Ux, Ux) = (x, x) = \|x\|^2$.

(iii) => (i) Operátor U je izometrie H na H, a tedy existuje U^{-1}. Platí $(U^*Ux, x) = (Ux, Ux) = (Ix, x)$ pro každé $x \in H$. Potom podle DŮSLEDKU 2.3 máme $U^*U = I$. Odtud plyne $U^* = U^{-1}$, a tedy také $UU^* = UU^{-1} = I$ ∎

VĚTA 2.12 (charakterizace ortogonálních projekcí)

Nechť $P \in \mathcal{L}(H)$ je projekce. Pak je ekvivalentní:

(i) P je samoadjungovaná,

(ii) P je normální,

(iii) P je ortogonální,

(iv) $(Px, x) = \|Px\|^2$, $x \in H$.

DŮKAZ

(i) => (ii) Zřejmé.

(ii) => (iii) Platí $\operatorname{Ker}(P) \underset{V2.5.1}{=} \operatorname{Ker}(P^*) \underset{L2.1.2}{=} \operatorname{Rng} P^{\perp}$.

(iii) => (iv) Pro $x \in H$ platí $(\underbrace{Px}_{\in \operatorname{Rng} P}, \underbrace{x - Px}_{\in \operatorname{Ker} P}) = 0$, a tedy $(Px, x) = (Px, Px)$.

(iv) ⇒ (i) Pro každé $x \in H$ platí $(Px, x) = \|Px\|^2 \in \mathbb{R}$, a tedy $P = P^*$ podle VĚTY 2.6. ■

VĚTA 2.13 (Hilbert-Schmidt)

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je kompaktní a normální. Pak existuje ortonormální báze H tvořená vlastními vektory T. Dále existují nenulová vlastní čísla $\{\lambda_n\}$ a ortonormální báze $\{e_n\}$ prostoru $\overline{\operatorname{Rng} T}$ takové, že

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n .$$

DŮKAZ

1. Pro $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, máme $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$.

Operátor $S = T|_{\operatorname{Ker}(\lambda I - T)}$ je kompaktní a platí $Sx = Tx = \lambda x$, $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Potom je identita na $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ kompaktní, a tedy $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$.

2. Podle VĚTY 10.4(ii) UFA existuje pouze spočetně mnoho nenulových vlastních čísel. Pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, nalezneme ON-bázi prostoru $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Prvků těchto bází je spočetně mnoho.
Seřaďme je do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jednoznačně určené vlastní číslo k e_n označme λ_n. Množina $\{e_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální: pokud $\lambda_n \neq \lambda_m$, potom $(e_n, e_m) = 0$ (VĚTA 2.5(4)); pokud $\lambda_n = \lambda_m$, $n \neq m$, pak $(e_n, e_m) = 0$ podle definice prvků e_n, $n \in \mathbb{N}$.
Označme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_n;\, n \in \mathbb{N}\}$. Postupně dokážeme $\operatorname{Ker} T = Y^{\perp}$.

3. $T(Y^{\perp}) \subseteq Y^{\perp}$

Pro $x \in Y^{\perp}$ máme $(Tx, e_n) = (x, T^* e_n) = (x, \overline{\lambda}_n e_n) = \lambda_n (x, e_n) \overset{x \in Y^{\perp}}{=} 0$.
Odtud plyne $Tx \in Y^{\perp}$.

4. $T^*(Y^{\perp}) \subseteq Y^{\perp}$

Pro $x \in Y^{\perp}$ máme $(T^* x, e_n) = (x, T e_n) = (x, \lambda_n e_n) = \overline{\lambda}_n (x, e_n) = 0$.

5. $T(Y) \subseteq Y$

Pro $x \in Y$ máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$, a tedy $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) T e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n \in Y$.

6. $Y^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} T$

Označme $S = T|_{Y^\perp}$. Potom $S \in \mathcal{L}(Y^\perp)$ a $S^* = T^*|_{Y^\perp}$. Operátor T je tedy normální. Předpokládejme, že $Sx = \lambda x$, $x \neq 0$, $\lambda \neq 0$. Potom ale $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$, a tedy $x \in Y$, což je spor. Operátor S je kompaktní, takže $\sigma(S) = \{0\}$. Podle VĚTY 2.5(6) máme $\|S\| = 0$, takže $Y^\perp \subseteq \operatorname{Ker} T$.

7. $\operatorname{Ker} T \subseteq Y^\perp$

Pro $x \in \operatorname{Ker} T$ máme $0 = (Tx, e_n) = (x, T^* e_n) = (x, \overline{\lambda_n} e_n) = \lambda_n (x, e_n)$. Potom $(x, e_n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $x \in Y^\perp$.

8. $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$

Pro $x \in H$ platí: $Tx \overset{(5)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (Tx, e_n) e_n$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (x, T^* e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x, \overline{\lambda_n} e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$.

9. $Y = \overline{\operatorname{Rng} T}$

Platí $Y = Y^{\perp\perp} = \operatorname{Ker} T^{\perp} = \operatorname{Ker} T^{*\perp} = \operatorname{Rng} T^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Rng} T}$.

10. ON-množinu $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ doplníme na bázi H pomocí ON báze $\operatorname{Ker} T$. ∎

KONEC 3. PŘEDNÁŠKY, 9.3.2011

3. Vektorová integrace

DEFINICE

Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor, $f: K \to X$ a μ je Radonova míra na K. Nechť pro $x \in X$ platí

$$\forall x^* \in X^*: \quad x^*(x) = \int_K x^* \circ f(t) \, d\mu(t).$$

Pak říkáme, že Pettisův integrál funkce f je roven x.

POZNÁMKA

Pokud má f Pettisův integrál, potom je jeho hodnota určena jednoznačně, neboť X^* odděluje body (VĚTA 6.4 UFA). Hodnotu integrálu pak značíme $\int_K f \, d\mu$.

LEMMA 3.1

Nechť X je Banachův prostor a $F \subset X$ je kompaktní.

(i) Potom je $\overline{\text{co}}\, F$ kompaktní.

(ii) Pokud navíc $\dim X < \infty$, pak je $\text{co}\, F$ kompaktní.

DŮKAZ.

(i) Podle VĚTY 14.9 MA2a stačí ukázat, že $\overline{\text{co}}\, F$ je úplný a totálně omezený.

Úplnost $\overline{\text{co}}\, F$. Množina $\overline{\text{co}}\, F$ je uzavřená v úplném metrickém prostoru, a tedy jde o úplný podprostor (VĚTA 14.2 (ii) MA2a).

Totální omezenost $\overline{\text{co}}\, F$. Stačí ukázat totální omezenost $\text{co}\, F$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nechť $\{x_j;\, j = 1, \dots, m\}$ je konečná ε-síť množiny F. Označme

$$S = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m\}.$$

Zvolme $c > \max\{\|x_j\|;\, j = 1, \dots, m\}$.

Množina S je omezená a uzavřená, takže je i kompaktní. Nechť $A \subset S$ je ε/c-síť množiny S vzhledem k ℓ_1-metrice.

Položme $T = \left\{\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j;\ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in A\right\}$.

Množina T je konečná. Ukážeme, že tvoří 2ε-síť množiny $\operatorname{co} F$.
Nechť $y \in \operatorname{co} F$, tj. $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i$, kde $\beta_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$, $y_i \in F$. Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ nalezneme $x_{j(i)}$ takové, že $\|y_i - x_{j(i)}\| < \varepsilon$. Potom máme

$$\|y - \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_{j(i)}\| \leq \sum_{i=1}^{m} \beta_i \|y_i - x_{j(i)}\| < \varepsilon .$$

Dále platí $\sum_{i=1}^{m} \beta_i x_{j(i)} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j x_j$, kde $\gamma_j = \sum_{j(i)=j} \beta_i$. Potom $(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in S$.

Nyní nalezneme $(\delta_1, \dots, \delta_m) \in A$ takové, že

$$\|(\delta_1, \dots, \delta_m) - (\gamma_1, \dots, \gamma_m)\|_1 < \varepsilon / C .$$

Položme $x = \sum_{j=1}^{m} \delta_j x_j$. Potom

$$\|x - x^*\| \leq \sum_{j=1}^{m} |\delta_j - \gamma_j| \, \|x_j\| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon ,$$

$$\|y - x\| \leq \|y - x^*\| + \|x^* - x\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon .$$

(ii) Nechť $\dim X = n$. Podle Carathéodoryovy věty platí

$$\operatorname{co} D = \Big\{ \sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i ; \ c_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1, \ x_i \in D \Big\} .$$

■

<u>VĚTA 3.2</u>

Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor, $f: K \to X$ je spojité zobrazení a μ je pravděpodobnostní míra na K. Potom $\int_K f \, d\mu$ existuje a je prvkem $\overline{\operatorname{co}} f(K)$.

DŮKAZ

Označme $H := \overline{\operatorname{co}} f(K)$. Množina H je kompaktní (LEMMA 3.1).
Předpokládejme nejprve, že X je reálný. Nechť $L = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n\}$ je konečná podmnožina X^*. Definujme

$$E_L = \{ x \in H ; \ \forall \Lambda \in L : \Lambda x = \int \Lambda \circ f \, d\mu \} .$$

Množina E_L je uzavřená, a tedy kompaktní.

$E_L \neq \emptyset$. Definujme $T: X \to \mathbb{K}^m$ jako $Tx = (\Lambda_1 x, \dots, \Lambda_m x)$. Označme $D = T(f(K))$, $m_i = \int_K \Lambda_i \circ f \, d\mu$ a $m = (m_1, \dots, m_m)$. Platí $\overline{co}\, D = co\, D$ (L 3.1(ii)). Nechť $s \in \mathbb{K}^m \setminus co\, D$. Pak existují $\varphi \in (\mathbb{K}^m)^*$ a $c \in \mathbb{R}$ (VĚTA 6.8(ii) UFA) takové, že $\operatorname{Re} \varphi(u) < c < \operatorname{Re} \varphi(s)$. Platí tedy pro každé $x \in K$

$$\operatorname{Re} \varphi \circ T f(x) < c < \operatorname{Re} \varphi(s).$$

Potom $\int \operatorname{Re} \varphi T f(x) \, d\mu(x) = \operatorname{Re} \varphi \left(\int T f(x) \, d\mu \right) = \operatorname{Re} \varphi(m)$ a dále $\int \operatorname{Re} \varphi(s) \, d\mu(x) = \operatorname{Re} \varphi(s)$, neboť μ je pravděpodobnostní míra. Potom $\operatorname{Re} \varphi(m) < \operatorname{Re} \varphi(s)$, a tedy $m \neq s$.
Odtud plyne $m \in co\, D = co\, T f(K) = T\, co f(K)$, a tedy $m = Ty$, kde $y \in co f(K)$. Máme tedy

$$m_i = \int \Lambda_i \circ f \, d\mu = \Lambda_i y, \quad i = 1, \dots, m,$$

tj. $y \in E_L$.

• $\bigcap \{ E_L ; L \subset X^* \text{ je konečná} \} \neq \emptyset$. Kdyby tomu tak nebylo, pak

$$\{ H \setminus E_L ; L \subset X^* \text{ je konečná} \}$$

tvoří otevřené pokrytí H. Z kompaktnosti H potom $H = (H \setminus E_{L_1}) \cup \dots \cup (H \setminus E_{L_k})$, tj. $E_{L_1} \cap E_{L_2} \cap \dots \cap E_{L_k} = E_{L_1 \cup \dots \cup L_k} \neq \emptyset$, což je spor. ∎

<u>VĚTA 3.3</u>
Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor, $f: K \to X$ je spojité zobrazení a μ je komplexní Radonova míra na K. Potom platí:
(i) integrál $\int_K f \, d\mu$ existuje,
(ii) je-li Y Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak $\int_K (T \circ f) \, d\mu = T\left(\int_K f \, d\mu \right)$,
(iii) $\left\| \int_K f \, d\mu \right\| \leq \int_K \|f\| \, d|\mu|$.

DŮKAZ
(i) Platí $\mu = a_1 \mu_1 - a_2 \mu_2 + i(a_3 \mu_3 - a_4 \mu_4)$, kde $a_i \geq 0$ a $\mu_i \in \mathcal{M}^1(K)$.
Tvrzení plyne potom z VĚTY 3.2.

(ii) Označme $x = \int f\,d\mu$ a $y = \int T\circ f\,d\mu$. Chceme dokázat $y = Tx$. Vezměme $y \in Y^*$. Potom platí pro každé $y^* \in Y^*$

$$y^* Tx = \int y^* \circ T \circ f\,d\mu = y^*(y),$$

a tedy $y = Tx$.

(iii) Označme $x = \int f\,d\mu$. Vezměme $x^* \in S_{X^*}$, $x^*(x) = \|x\|$. Potom platí

$$\left\|\int f\,d\mu\right\| = \|x\| = x^*(x) = \int x^* \circ f\,d\mu \le \int |x^* \circ f|\,d\mu \le \int \|f\|\,d\mu. \qquad \blacksquare$$

KONEC 4. PŘEDNÁŠKY, 16.3.2011

4. Analytický (Dunfordův) kalkulus

Fakta z komplexní analýzy

VĚTA (Cauchy)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f \in Hol(\Omega)$ a Γ je cyklus v Ω splňující $\operatorname{ind}_\Gamma \alpha = 0$ pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Potom platí

(i) $f(\lambda) \operatorname{ind}_\Gamma \lambda = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-\lambda}\, dw$ pro $\lambda \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle$,

(ii) $\displaystyle\int_\Gamma f(w)\, dw = 0$,

(iii) jsou-li Γ_1, Γ_2 cykly v Ω splňující $\operatorname{ind}_{\Gamma_1} \alpha = \operatorname{ind}_{\Gamma_2} \alpha$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, potom $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(w)\, dw = \int_{\Gamma_2} f(w)\, dw$.

VĚTA
Nechť $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}$, K je kompaktní a Ω je otevřená. Potom existuje cyklus Γ v Ω takový, že

(i) $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega \setminus K$,

(ii) $\operatorname{ind}_\Gamma \alpha = \begin{cases} 1, & \alpha \in K, \\ 0, & \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \end{cases}$

DEFINICE
Má-li Γ vlastnosti (i)-(ii) z předchozí věty, pak řekneme, že Γ ohraničuje K v Ω.

OZNAČENÍ
Nechť $K \subset \mathbb{C}$ je kompaktní. Potom symbolem $Hol(K)$ budeme značit množinu všech holomorfních funkcí f splňujících $K \subset D(f)$ a $D(f)$ je otevřená množina.

OZNAČENÍ

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. Označme $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$, $\lambda \in \varrho(T)$.

LEMMA 4.1

Nechť $T, S \in \mathcal{L}(X)$.

(i) Jestliže S komutuje s T, potom S komutuje s R_λ pro $\lambda \in \varrho(T)$.

(ii) Pro $\lambda, \omega \in \varrho(T)$ platí $R_\omega - R_\lambda = (\lambda - \omega) R_\lambda R_\omega$. (resolventní identita)

DŮKAZ

(i) Platí $S(\lambda I - T) = (\lambda I - T)S$, a tedy $S R_\lambda^{-1} = R_\lambda^{-1} S$ pro $\lambda \in \varrho(T)$. Odtud plyne dokazovaná identita.

(ii) Pro $\omega, \lambda \in \varrho(T)$:
$$\begin{aligned}(\omega I - T)^{-1} - (\lambda I - T)^{-1} &= (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1}(\omega I - T)^{-1} \\ &\quad - (\lambda I - T)^{-1}(\omega I - T)^{-1}(\omega I - T) \\ &= (\lambda I - T) R_\lambda R_\omega - R_\lambda R_\omega (\omega I - T) \\ &= (\lambda - \omega) R_\lambda R_\omega - (T R_\lambda R_\omega - R_\lambda R_\omega T) \\ &= (\lambda - \omega) R_\lambda R_\omega. \end{aligned}$$
■

VĚTA 4.2 (existence analytického kalkulu)

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(T))$. Položme
$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R_\lambda \, d\lambda,$$
kde Γ je cyklus ohraničující $\sigma(T)$ v $D(f)$. Zobrazení $\Phi: f \mapsto f(T)$ z $\mathcal{H}ol(\sigma(T))$ do $\mathcal{L}(X)$ je dobře definované a nezávisí na volbě Γ.

DŮKAZ

Zobrazení $t \mapsto f(\Gamma(t)) \Gamma'(t) R_{\Gamma(t)}$ je spojité na $D(\Gamma)$, což je konečné sjednocení uzavřených intervalů. Podle VĚTY 3.3 příslušný integrál existuje.

Uvažujme dva cykly Γ_1 a Γ_2 ohraničující $\sigma(T)$ v $D(f)$. Vezměme libovolné $x^* \in \mathcal{L}(X)^*$. Zobrazení $\lambda \mapsto x^*((\lambda I - T)^{-1})$ je holomorfní na $\varrho(T)$ (viz důkaz VĚTY 10.3 UFA). Položme $\Omega := D(f) \setminus \sigma(T)$. Potom pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$

- $\alpha \in \sigma(T)$: $\operatorname{ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \operatorname{ind}_{\Gamma_2}(\alpha) = 1$,
- $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D(f)$: $\operatorname{ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \operatorname{ind}_{\Gamma_2}(\alpha) = 0$.

Podle Cauchyovy věty platí
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} x^*(f(\lambda)R_\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} x^*(f(\lambda)R_\lambda)\,d\lambda.$$
Pak máme $\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)R_\lambda\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f(\lambda)R_\lambda\,d\lambda.$

■

POZNÁMKA

Lze ukázat, že vlastnosti (1)-(3) v následující větě jednoznačně určují Φ.

VĚTA 4.3 (vlastnosti analytického kalkulu)

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(T))$. Potom platí:

(1) $(1)T = I$, $id(T) = T$,

(2) Φ je algebraický homomorfismus $\mathcal{H}ol(\sigma(T))$ do $\mathcal{L}(X)$,

(3) jestliže $f_n \in \mathcal{H}ol(D(f))$, $n \in \mathbb{N}$, a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $D(f)$, potom $f_n(T) \to f(T)$ v $\mathcal{L}(X)$,

(4) $f(T)$ je invertibilní, právě když $f \neq 0$ na $\sigma(T)$,

(5) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ (věta o obrazu spektra),

(6) $(g\circ f)(T) = g(f(T))$ pro $g \in \mathcal{H}ol(\sigma(f(T)))$,

(7) pokud $S \in \mathcal{L}(X)$ komutuje s T, pak $Sf(T) = f(T)S$,

(8) $(f(T))' = f(T')$.

DŮKAZ

(1) Položme $\Gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > \|T\|$. Potom Γ ohraničuje $\sigma(T)$ v $\mathbb{C}$ a platí
$$x^*(1)(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x^*\circ R_\lambda\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^*(T^n)}{\lambda^{n+1}}\,d\lambda = x^*(I),$$
a tedy $(1)(T) = I$.

Podobně
$$x^*(id)(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x^*(\lambda R_\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^*(T^n)}{\lambda^n}\,d\lambda = x^*(T),$$
a tedy $(id)(T) = T$.

■

(2) Máme dokázat $\Phi(f+g)=\Phi(f)+\Phi(g)$ a $\Phi(fg)=\Phi(f)\circ\Phi(g)$ pro $f,g\in \mathcal{H}ol(\sigma(T))$. První vztah se ověří snadno. Podívejme se na druhý. Nechť $\Omega\subset\mathbb{C}$ je otevřená množina obsahující $\sigma(T)$ a $f,g\in\mathcal{H}ol(\sigma(T))$. Nechť Γ je cyklus ohraničující $\sigma(T)$ v Ω. Položme $L:=\overline{\{\alpha\in\mathbb{C};\ \mathrm{ind}_\Gamma\alpha=1\}}$. Množina L je omezená a uzavřená, takže je kompaktní. Dále platí $L\subset\Omega$, neboť $\mathbb{C}\setminus\Omega\subset\{\alpha\in\mathbb{C};\ \mathrm{ind}_\Gamma(\alpha)=0\}$ a $\{\alpha\in\mathbb{C};\ \mathrm{ind}_\Gamma(\alpha)=0\}$. Můžeme tedy nalézt cyklus Λ ohraničující L v Ω. Pak můžeme počítat

$$f(T)\circ g(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)R_z\,dz\circ\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda g(w)R_w\,dw$$

$$=\frac{-1}{4\pi^2}\int_\Gamma\Big(\int_\Lambda f(z)g(w)R_zR_w\,dw\Big)dz \qquad \Big[\int h(x)\,d\mu(x)\circ T=\int h(x)\circ T\,d\mu(x)\Big]$$

$$=\frac{-1}{4\pi^2}\int_\Gamma\Big(\int_\Lambda f(z)g(w)\frac{R_z-R_w}{w-z}\,dw\Big)dz \qquad [z\neq w]$$

$$=\frac{-1}{4\pi^2}\Big(\int_\Gamma f(z)R_z\underbrace{\Big(\int_\Lambda\frac{g(w)}{w-z}\,dw\Big)}_{=2\pi i\,g(z)}dz-\underbrace{\int_\Gamma\int_\Lambda\frac{f(z)}{w-z}\,g(w)R_w\,dw\,dz}_{=0}\Big)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)g(z)R_z\,dz=(fg)(T).$$

(3) Počítejme

$$\|f_n(T)-f(T)\|\le\int_{D(\Gamma)}|f_n(\Gamma(t))-f(\Gamma(t))|\cdot\|R_{\Gamma(t)}\|\cdot|\Gamma'(t)|\,dt\to 0,\ n\to\infty$$

(4) $\Rightarrow$ Kdyby $f(z_0)=0$ pro $z_0\in\sigma(T)$, potom $f(z)=(z_0-z)g(z)$, kde $g\in\mathcal{H}ol(D(f))$. Potom $f(T)=(z_0I-T)g(T)=g(T)(z_0I-T)$. Operátor z_0I-T není invertibilní, a tedy $f(T)$ není invertibilní.

$\Leftarrow$ Je-li $f \neq 0$ na $\sigma(T)$, potom $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}ol(\sigma(T))$, a tedy

$$I = f(T)\,\frac{1}{f}(T) = \frac{1}{f}(T)\,f(T),$$

tj. $f(T)$ je invertibilní.

(5) Platí

$$\lambda_0 \in \sigma(f(T)) \Leftrightarrow \lambda_0 I - f(T) = (\lambda_0 - f)(T) \text{ není invertibilní}$$
$$\Leftrightarrow \exists z_0 \in \sigma(T):\ \lambda_0 - f(z_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_0 \in f(\sigma(T))$$

KONEC 5. PŘEDNÁŠKY, 23.3.2011

(6) Nechť $\Omega_0, \Omega_1 \subseteq \mathbb{C}$ jsou otevřené množiny takové, že $\sigma(T) \subset \Omega_0$, $f \in \mathcal{H}ol(\Omega_0)$, $f(\sigma(T)) \subset \Omega_1$, $g \in \mathcal{H}ol(\Omega_1)$ a $g \circ f \in \mathcal{H}ol(\Omega_0)$. Položme $W = f^{-1}(\{\xi \in \Omega_1;\ \mathrm{ind}_{\Gamma_1} \xi = 1\})$. Množina W je otevřená a obsahuje $\sigma(T)$. Nechť Γ_0 je cyklus ohraničující $\sigma(T)$ ve W. Pro $\xi \in \langle \Gamma_1 \rangle$ platí $\frac{1}{\xi - f} \in \mathcal{H}ol(W)$, a tedy

$$(\xi I - f(T))^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\xi - f(z)}\, R_z\, dz.$$

Dále

$$g(f(T)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\xi)\,(\xi I - f(T))^{-1}\, d\xi.$$

Odtud

$$g(f(T)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\xi)\,\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\xi - f(z)}\, R_z\, dz\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{g(\xi)}{\xi - f(z)}\, d\xi \right) R_z\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} g(f(z))\, R_z\, dz = (g \circ f)(T).$$

$$(8) \quad f(T)'(x^*) = x^* \circ f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\, x^* \circ R_z \, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z) R_z'(x^*)\, dz =$$

$$R_z' = (zI - T)^{-1\,'} = (zI - T')^{-1} \qquad L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = I \Rightarrow (LL^{-1})' = (L^{-1}L)' = I'$$

$$\Rightarrow L^{-1\,'} L' = L' L^{-1\,'} = I'$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(zI - T')^{-1}(x^*)\, dz = f(T')(x^*) \qquad \blacksquare$$

VĚTA 4.4

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$, kde H je Hilbertův, a $f \in Hol(\sigma(T))$. Potom platí:

(i) $f(T)^* = \tilde{f}(T^*)$, kde $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$,

(ii) je-li T normální, pak je $f(T)$ normální.

DŮKAZ

(i) Pokud $L \in \mathcal{L}(H)$ a L^{-1} existuje, potom $(LL^{-1})^* = (L^{-1}L)^* = I^* = I$, odtud $L^{-1*}L^* = L^*L^{-1*} = I$, a tedy $L^{*-1} = L^{-1*}$. Potom máme $R_z^* = (zI - T)^{-1*} = (\bar{z}I - T^*)^{-1}$. Označme $\tilde{R}_z = (zI - T^*)^{-1}$, $z \in \rho(T^*)$.

Nechť $\Gamma : D(\Gamma) \to \mathbb{C}$ ohraničuje $\sigma(T)$ v $D(f)$. Potom $\psi : -D(\Gamma) \to \mathbb{C}$ definované předpisem $\psi(t) = \overline{\Gamma(-t)}$ ohraničuje $\sigma(T^*)$ v $\overline{D(f)}$.

Počítejme pro $u, v \in H$:

$$\langle f^*(T)u, v\rangle = \overline{\langle f(T)v, u\rangle} = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\langle R_z v, u\rangle\, dz}$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{D(\Gamma)} f(\Gamma(t))\langle R_{\Gamma(t)}v, u\rangle \Gamma'(t)\, dt} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{D(\Gamma)} \overline{f(\Gamma(t))}\ \langle u, R_{\Gamma(t)}v\rangle\, \overline{\Gamma'(t)}\, dt$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\int_{D(\Gamma)} \tilde{f}(\overline{\Gamma(t)})\langle R^*_{\Gamma(t)}u, v\rangle\, \overline{\Gamma'(t)}\, dt = \frac{-1}{2\pi i}\int_{D(\Gamma)} \tilde{f}(\overline{\Gamma(t)})\langle \tilde{R}_{\overline{\Gamma(t)}}u, v\rangle\, \overline{\Gamma'(t)}\, dt$$

$$= \left\langle \frac{1}{2\pi i}\int_\psi \tilde{f}(z)\tilde{R}_z\, dz\ u, v\right\rangle = \langle \tilde{f}(T^*)u, v\rangle. \qquad \blacksquare$$

(ii) Platí $TT^* = T^*T$, a tedy $T\tilde{f}(T^*) = \tilde{f}(T^*)T$, takže $R_\lambda \tilde{f}(T^*) = \tilde{f}(T^*)R_\lambda$.
Potom

$$f(T)f(T)^* = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)R_\lambda f(T)^* d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)f(T)^* R_\lambda d\lambda$$
$$= f(T)^* \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)R_\lambda d\lambda = f(T)^* f(T). \qquad \blacksquare$$

VĚTA 4.5 (logaritmus a odmocnina)
Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a 0 leží v neomezené komponentě $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Potom
(i) existuje $S \in \mathcal{L}(X)$, že $\exp(S) = T$, neboli existuje logaritmus T,
(ii) $\sqrt[n]{T}$ existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ
(i) Existuje otevřená jednoduše souvislá množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ taková, že $\sigma(T) \subset \Omega$ a $f \in Hol(\Omega)$ taková, že $\exp(f(\lambda)) = \lambda$. Položme $S = f(T)$.
Potom $\exp(S) = \exp f(T) = T$.

(ii) Položme $L = \exp(\frac{1}{n}S)$. Potom $L^n = \exp(S) = T$. $\blacksquare$

5. Spojitý kalkulus

Úmluva

Symbol H bude v kapitolách 5-7 značit netriviální komplexní Hilbertův prostor.

LEMMA 5.1

Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální a $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má tvar $p(z) = \sum_{k,l=0}^{n} a_{kl} z^k \bar{z}^l$. Potom operátor $p(T) := \sum_{k,l=0}^{n} a_{kl} T^k T^{*l}$ splňuje $\|p(T)\| = \|p\|_{C(\sigma(T))}$.

DŮKAZ (pouze pro samoadjungovaný operátor T)
Položme $q(z) = \sum_{k,l=0}^{n} a_{kl} z^{k+l}$. Potom $q(T) = p(T)$ a $\|q\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))} = \|p\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$, neboť $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Podle VĚTY 2.5 (6) máme $\|q(T)\| = r(q(T))$ a VĚTA 4.5 (6) dává $r(q(T)) = \|q\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$. Odtud plyne dokazovaný vztah. ∎

VĚTA 5.2

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje spojitý kalkulus $\varphi: \mathcal{C}(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ s následujícími vlastnostmi

(1) $\varphi(p) = p(T)$ pro $p(z) = \sum_{k,l=0}^{n} a_{kl} T^k T^{*l}$,

(2) φ je algebraický izomorfismus $\mathcal{C}(\sigma(T))$ do $\mathcal{L}(H)$, $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*$ a $\|\varphi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$,

(3) $\varphi(f) = f(T)$ pro $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(T))$,

(4) $\sigma(\varphi(f)) = f(\sigma(T))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,

(5) $\varphi(f)$ je normální pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,

(6) $\varphi(f)$ je samoadjungovaný, právě když je f reálná,

(7) $\varphi(f \circ g) = f(\varphi(g))$ pro $g \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, kde $f(\varphi(g))$ značí spojitý kalkulus pro $\varphi(g)$,

(8) jestliže S komutuje s T, potom S komutuje s $\varphi(f)$.

DŮKAZ

Konstrukce φ. Pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ nalezneme posloupnost „polynomů" (jako v LEMMATU 5.1) $\{p_n\}$ takovou, že $p_n \rightrightarrows f$ na $\sigma(T)$. Platí $\{p_n(T)\}$ je cauchyovská, neboť $\|p_n(T) - p_m(T)\| = \|p_n - p_m\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$.

Položme $\varphi(f) := \lim p_n(T)$. Operátor $\varphi(f)$ je dobře definován, tj. nezáleží na volbě $\{p_n\}$.

Ověření vlastností

(1) zřejmé.

(2) Jsou-li p, q „polynomy", potom $(p+q)(T) = p(T)+q(T)$, $(pq)(T) = p(T)q(T)$ $\bar{p}(T) = p(T)^*$ a $\|p(T)\| = \|p\|_{C(\sigma(T))}$. Odtud plynou příslušné vlastnosti pro $f \in \mathcal{E}(\sigma(T))$ limitním přechodem. Pokud $\varphi(f)=0$, potom $\|f\|=0$, a tedy $f=0$, tj. φ je prosté.

(3) Plyne z jednoznačnosti holomorfního kalkulu.

(4) Jen naznačeno.

(5) $\varphi(f)\varphi(f)^* = \varphi(f)\varphi(\bar{f}) = \varphi(|f|^2) = \varphi(\bar{f})\varphi(f) = \varphi(f)^*\varphi(f)$

(6) $\varphi(f) = \varphi(\bar{f}) \Leftrightarrow f = \bar{f}$

KONEC 6. PŘEDNÁŠKY, 30. 3. 2011

(7) Nalezneme posloupnost „polynomů" $\{q_n\}$ takovou, že $q_n \rightrightarrows g$ na $f(\sigma(T))$. Potom $q_n \circ f \rightrightarrows g \circ f$ na $\sigma(T)$ a $\varphi(q_n \circ f) = q_n(\varphi(f))$ podle (2). Pak opět podle (2) $\varphi(q_n \circ f) \to \varphi(g \circ f)$ a $q_n(\varphi(f)) \to g(\varphi(f))$.

(8) Pokud je T normální a $ST = TS$, potom také $ST^* = T^*S$. Tento fakt je netriviální a nebudeme ho dokazovat. Plyne z Fuglede-Putnam-Rosenblumovy věty [RUDIN]. Potom již známe $Sp(T) = p(T)S$ pro libovolný „polynom" a limitním přechodem dostaneme $S\varphi(f) = \varphi(f)S$. ∎

6. Borelovský kalkulus

LEMMA 6.1

Nechť $B: H \times H \to \mathbb{C}$ je v první souřadnici lineární a ve druhé sdruženě lineární a nechť $M := \sup_{x,y \in B_H} |B(x,y)| < \infty$. Pak existuje právě jeden $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $B(x,y) = (Tx, y)$ pro $x, y \in H$ a $\|T\| = M$.

DŮKAZ

Pro pevné $y \in H$ je $x \mapsto B(x,y)$ prvkem H^* a existuje podle VĚTY 4.2 UFA $Sy \in H$ takové, že $B(x,y) = (x, Sy)$.

· S je lineární

$$B(x, \alpha y) = (x, S\alpha y)$$
$$\shortparallel$$
$$\bar{\alpha} B(x,y) = \bar{\alpha}(x, Sy) = (x, \alpha Sy)$$

$$B(x, y_1 + y_2) = (x, S(y_1 + y_2))$$
$$\shortparallel$$
$$B(x, y_1) + B(x, y_2) = (x, Sy_1) + (x, Sy_2)$$

· $\|S\| = M$

$$\|Sy\|^2 = (Sy, Sy) = B(Sy, y) \leq M \|Sy\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|Sy\| \leq M\|y\|$$

$$|B(x_m, y_m)| \to M \qquad x_m, y_m \in B_H$$
$$\shortparallel$$
$$|(x_m, Sy_m)| \leq \|x_m\| \|Sy_m\| \leq \|Sy_m\|$$

Položme $T = S^*$. Potom $\|T\| = \|S\| = M$, $B(x,y) = (Tx, y)$ ■

OZNAČENÍ

Nechť P je metrický prostor, pak $\mathcal{B}^b(P)$ značí množinu všech omezených borelovských funkcí z P do $\mathbb{C}$. Množinu $\mathcal{B}^b(P)$ opatříme supremovou normou.

LEMMA 6.2

Nechť P je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{A}$ je nejmenší systém komplexních funkcí, který obsahuje spojité funkce a je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností. Potom $\mathcal{A} = \mathcal{B}^b(P)$

POZNÁMKA K DŮKAZU

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^b(P)$: stačí ověřit, že borelovskost funkce se zachovává bodovou limitou
- $\mathcal{B}^b(P) \subset \mathcal{A}$: stačí ověřit, že $\chi_B \in \mathcal{A}$ pro $B \subset P$ borelovskou.

VĚTA 6.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje borelovský kalkulus $\Theta : \mathcal{B}^b(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ takový, že

(1) $\Theta = \varphi$ na $\mathcal{C}(\sigma(T))$,

(2) Θ je algebraický homomorfismus, $\Theta(f)^* = \Theta(\overline{f})$, $\|\Theta(f)\| \le \|f\|_{\mathcal{B}^b(\sigma(T))}$

(3) jestliže $f_n \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$, $f_n \to f$ a $\{f_n\}$ je omezená, potom pro každé $x, y \in H$ platí $(\Theta(f_n)x, y) \to (\Theta(f)x, y)$,

(4) $\Theta(f)$ je normální pro $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$,

(5) pokud $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$ je reálná, pak $\Theta(f)$ je samoadjungovaný,

(6) pokud S komutuje s T, potom S komutuje s $\Theta(f)$ pro $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$.

DŮKAZ

Konstrukce kalkulu.

Zafixujme $x, y \in H$. Uvažujme zobrazení $R : f \mapsto (\varphi(f)x, y)$ z $\mathcal{C}(\sigma(T))$ do $\mathbb{C}$.
R je lineární (zřejmé) a spojité

$$|(\varphi(f)x, y)| \le \|\varphi(f)x\| \cdot \|y\| \le \|\varphi(f)\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \le \|\varphi\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \cdot \|f\|.$$

Podle Rieszovy věty existuje právě jedna Radonova míra $\mu_{x,y}$ na $\sigma(T)$ taková, že $R(f) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda)$. Navíc platí $\|R\| = \|\mu_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
Máme tedy

$$(\varphi(f)x, y) = \int_{\sigma(T)} f\, d\mu_{x,y}.$$

Odtud plyne

$$\mu_{\alpha x_1 + \beta x_2, y} = \alpha \mu_{x_1,y} + \beta \mu_{x_2,y}, \qquad (*)$$

$$\mu_{x, \alpha y_1 + \beta y_2} = \bar{\alpha} \mu_{x,y_1} + \bar{\beta} \mu_{x,y_2}.$$

Pro $g \in B^b(\sigma(T))$ definujme $B_g(x,y) = \int_{\sigma(T)} g(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda)$. Potom B_g splňuje podmínky LEMMATU 6.1: linearita a sdružená linearita podle $(*)$ a $\sup\{|B_g(x,y)|;\ x,y \in B_H\} \leq \|g\| \cdot \|\mu_{x,y}\|$. Existuje tedy právě jedno $S \in \mathcal{L}(H)$ takové, že $(Sx, y) = \int_{\sigma(T)} g\, d\mu_{x,y}$. Položíme $\Theta(g) = S$.

Ověření vlastností (1)-(6)

(1) Podle definice máme $(\varphi(f)x, y) = (\Theta(f)x, y)$ pro každé $x, y \in H$, a tedy $\varphi(f) = \Theta(f)$.

(2) $(\Theta(f)x, y) = \int f\, d\mu_{x,y} = \lim \int f_n\, d\mu_{x,y} = \lim (\Theta(f_n)x, y)$.

(3) Θ je lineární přímo podle definice. Potom

$$\mathcal{A} = \{ g \in B^b(\sigma(T));\ \forall f \in \mathcal{C}(\sigma(T)) : \Theta(gf) = \Theta(g)\Theta(f) \}.$$

Potom $\mathcal{C}(\sigma(T)) \subseteq \mathcal{A}$. Nechť $\{g_n\} \subset \mathcal{A}$ je omezená a $g_n \to g$. Potom

$$(\Theta(gf)x, y) = \int gf\, d\mu_{x,y} = \lim \int g_n f\, d\mu_{x,y} = \lim (\Theta(g_n f)x, y)$$
$$= \lim (\Theta(g_n)\Theta(f)x, y) \underset{(2)}{=} (\Theta(g)\Theta(f)x, y).$$

Podle LEMMATU 6.2 máme $\mathcal{A} = B^b(\sigma(T))$. Dále definujme

$$\mathcal{I} = \{ g \in B^b(\sigma(T));\ \forall f \in \mathcal{C}(\sigma(T)) : \Theta(gf) = \Theta(g)\Theta(f) \}.$$

Potom opět $\mathcal{I} = B^b(\sigma(T))$.

$\Theta(f)^* = \Theta(\bar{f})$

Postupujeme obdobně jako v předchozí části. Položíme

$$\mathcal{A} := \{ f \in B^b(\sigma(T));\ \Phi(f)^* = \Phi(\bar{f}) \}$$

a odvodíme $\mathcal{A} = B^b(\sigma(T))$.

$\|\Theta(f)\| \le \|f\|$

$$|(\Theta(f)x, \Theta(f)x)| = \left|\int f \, d\mu_{x,\Theta(f)x}\right| \le \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|\Theta(f)x\|$$

$\Rightarrow \|\Theta(f)x\| \le \|f\| \cdot \|x\|$

KONEC 7. PŘEDNÁŠKY, 6. 4. 2011

(4) $\Theta(f)^* \Theta(f) = \Theta(\bar{f} f) = \Theta(f)\Theta(f)^*$

(5) $\Theta(f)^* = \Theta(\bar{f}) = \Theta(f)$

(6) $\mathcal{A} = \{ f \in B^b(\sigma(T));\ S\Theta(f) = \Theta(f)S \}$

Podle VĚTY 5.2 (8) máme $\mathcal{C}(\sigma(T)) \subset \mathcal{A}$. Je-li $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ omezená a $f_n \to f$, potom

$$(\Theta(f)Sx, y) = \lim (\Theta(f_n)Sx, y) = \lim (S\Theta(f_n)x, y)$$
$$= \lim (\Theta(f_n)x, S^* y) = (S\Theta(f)x, y).$$

4. Spektrální rozklad normálního operátoru

OZNAČENÍ

Nechť K je metrický prostor. Systém všech borelovských podmnožin označme $\mathrm{Borel}(K)$.

DEFINICE

Nechť K je kompaktní metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $E: \mathrm{Borel}(K) \to \mathcal{L}(H)$ je spektrální míra, jestliže platí

(i) pro každou $B \in \mathrm{Borel}(K)$ je $E(B)$ ortogonální projekce, $E(\emptyset) = 0$, $E(K) = I$,

(ii) $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$ pro $B_1, B_2 \in \mathrm{Borel}(K)$,

(iii) $E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$ pro $B_1, B_2 \in \mathrm{Borel}(K)$ disjunktní,

(iv) pro každé $x \in H$ je zobrazení $E_{x,x}: B \mapsto (E(B)x, x)$ Radonova míra na K.

VĚTA 4.1

Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální, pak $E: \mathrm{Borel}(\sigma(T)) \mapsto \mathcal{L}(H)$ definované jako $E(B) = \Theta(\chi_B)$ je spektrální míra a platí:

(i) $\forall x \in H \ \forall f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T)): \ (\Theta(f)x, x) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) \, dE_{x,x}$,

(ii) pro $A \in \mathrm{Borel}(\sigma(T))$ a $T_A := T|_{\mathrm{Rng}\, E(A)}$ je $T_A \in \mathcal{L}(\mathrm{Rng}\, E(A))$ a $\sigma(T_A) \subset \overline{A}$,

(iii) pro každou otevřenou neprázdnou $G \subset \sigma(T)$ je $E(G) \neq 0$.

DŮKAZ

E je spektrální míra.

- $E(B)^* = E(B)$
- $E(B)E(B) = \Theta(\chi_B)\Theta(\chi_B) = \Theta(\chi_B^2) = \Theta(\chi_B) = E(B)$
- $E(\emptyset) = \Theta(\chi_\emptyset) = 0$, $E(K) = \Theta(1) = I$

- $E(B_1 \cap B_2) = \Theta(\chi_{B_1}\chi_{B_2}) = \Theta(\chi_{B_1})\,\Theta(\chi_{B_2}) = E(B_1)E(B_2)$
- $E(B_1 \cup B_2) = \Theta(\chi_{B_1} + \chi_{B_2}) = \Theta(\chi_{B_1}) + \Theta(\chi_{B_2}) = E(B_1) + E(B_2)$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$
- $(E(B)x,x) = (\Theta(\chi_B)x,x) = \int_B d\mu_{x,x} = \mu_{x,x}(B)$.

(i) $\mu_{x,x} = E_{x,x} \Rightarrow (\Theta(f)x,x) = \int_{\sigma(T)} f \, dE_{x,x}$

(ii) $T_A E(A)x = TE(A)x \underset{V6.3(6)}{=} E(A)Tx \in \operatorname{Rng} E(A)$

Vezměme $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{A}$ a definujme $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda - z}, & z \in A; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$

Potom f je omezená ($\lambda \notin \overline{A}$) a borelovská!

Položme dále $g(z) = (\lambda - z)\chi_A$. Potom $fg(z) = \chi_A$. Pro $x \in H$ platí

$$(E(A)x,x) = (\Theta(\chi_A)x,x) = (\Theta(f)\,\Theta(\lambda - id)\,\Theta(\chi_A)x,x) = (\Theta(f)(\lambda I - T)E(A)x,x)$$

Pro $x \in \operatorname{Rng} E(A)$ máme $(x,x) = (\Theta(f)(\lambda I - T)x,x)$, a tedy $I|_{\operatorname{Rng}E(A)} = \Theta(f)(\lambda I -$

Analogicky $\Theta(f)(\lambda I - T)|_{\operatorname{Rng}E(A)} = I|_{\operatorname{Rng}E(A)}$.

(iii) Předpokládejme $E(G) = 0$. Potom $I = E(\sigma(T) \setminus G)$, takže $\operatorname{Rng} E(\sigma(T)\setminus G) = H$.

Potom $T_{\sigma(T)\setminus G} = T$, a tedy $\sigma(T) = \sigma(T_{\sigma(T)\setminus G}) \subseteq \sigma(T) \setminus G$, což je spor. ∎

KONEC 8. PŘEDNÁŠKY, 13. 4. 2011

VĚTA 4.2

Nechť E je spektrální míra na neprázdném kompaktním metrickém prostoru K. Pro každou funkci $f \in B^b(K)$ existuje právě jeden $T(f) \in \mathcal{L}(H)$ splňující $(T(f)x,x) = \int f \, dE_{x,x}$, $x \in H$. Dále platí:

(i) zobrazení $T: f \mapsto T(f)$ je lineární, multiplikativní, $\|Q\| \leq 1$ a $T(f)^* = T(\overline{f})$,

(ii) $\|T(f)x\|^2 = \int |f|^2 \, dE_{x,x}$, $x \in H$.

ZNAČENÍ

$T(f) = \int f \, dE$

DŮKAZ

Označme $E_{x,y}(B) = (E(B)x, y)$. Platí
$$E_{x,y} = \frac{1}{4}\left(E_{x+y,x+y} - E_{x-y,x-y} + i\,E_{x+iy,x+iy} - i\,E_{x-iy,x-iy}\right), \qquad (1)$$
a tedy $E_{x,y}$ je komplexní Radonova míra.

Platí
$$\left|\int f\,dE_{x,x}\right| \leq \|f\|\,|(E(K)x,x)| = \|f\|\cdot\|x\|^2. \qquad (2)$$
Pro $x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$ platí podle (1) a (2)
$$\left|\int f\,dE_{x,y}\right| \leq \frac{1}{4}\,16\cdot\|f\|_\infty = 4\cdot\|f\|_\infty.$$

Zobrazení $(x,y) \mapsto \int f\,dE_{x,y}$ splňuje podmínky LEMMATU C.1, a tedy existuje právě jeden $T(f) \in \mathcal{L}(H)$ splňující $(T(f)x, y) = \int f\,dE_{x,y}$ pro každé $x, y \in H$. Označme $T(f)$ symbolem $\int f\,dE$.

T je lineární: Zřejmé.

T je multiplikativní: nechť $f = \sum c_j \chi_{A_j}$, $g = \sum d_k \chi_{B_k}$, kde $A_j, B_k \in \mathrm{Borel}(K)$. Potom $fg = \sum c_j d_k \chi_{A_j \cap B_k}$, a tedy
$$\int fg\,dE = \sum c_j d_k\, E(A_j \cap B_k) = \sum c_j d_k\, E(A_j)E(B_k) = \int f\,dE \int g\,dE.$$

Pokud $f_n \rightrightarrows f$, $f_n, f \in B^b(K)$, potom $T(f_n) \to T(f)$, neboť
$$\|T(f) - T(f_n)\| = \|T(f - f_n)\| \leq 4\|f_n - f\|_\infty \to 0.$$
Vztah $\int fg\,dE = \int f\,dE \int g\,dE$, $f, g \in B^b(K)$, obdržíme z předchozího, neboť každá $f \in B^b(K)$ je stejnoměrnou limitou jednoduchých borelovských funkcí.

$T(\overline{f}) = T(f)^*$ $\quad (T(\overline{f})x, x) = \int \overline{f}\,dE_{x,x} = \overline{\int f\,dE_{x,x}} = \overline{(T(f)x,x)} = (x, T(f)^*x)$
$$= (T(f)^*x, x).$$
Rovnost $T(\overline{f}) = T(f)^*$ potom plyne z DŮSLEDKU 2.3.

$\|T(f)x\|^2 = \int_K |f|^2 \, dE_{x,x}$

$$(T(f)x, T(f)x) = (T(f)^* T(f)x, x) = (T(\bar{f})T(f)x, x) = (T(|f|^2)x, x)$$
$$= \int |f|^2 \, dE_{x,x}$$

$\|T\| = 1$

- $\|f\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \|T(f)\| \leq 1$ (z předchozího)
- $T(1) = E(K) = I \Rightarrow \|T\| \geq 1.$

VĚTA 4.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Potom existuje právě jedna spektrální míra E na $\sigma(T)$ taková, že $T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE$.

DŮKAZ

Existence E

Plyne z VĚTY 6.3 a VĚTY 4.1.

Jednoznačnost E.

Mějme spektrální míry E_1, E_2 na $\sigma(T)$ splňující $\int_{\sigma(T)} x \, dE^1 = \int_{\sigma(T)} x \, dE^2$.

Označme

$$\mathcal{G} = \{ f \in B^b(\sigma(T)) ; \int f \, dE^1 = \int f \, dE^2 \}.$$

Podle VĚTY 4.2 je $\mathcal{G}$ samoadjungovaná algebra uzavřená na limity omezených posloupností. $\mathcal{G}$ odděluje body, neboť $id \in \mathcal{G}$. Potom podle Stone-Weierstrassovy věty máme $\mathcal{C}(\sigma(T)) \subset \mathcal{G}$ a podle LEMMATU 6.2 máme $\mathcal{G} = B^b(\sigma(T))$.

Potom $E^1_{x,x}(B) = E^2_{x,x}(B)$ pro každé $x \in H$, $B \in Borel(K)$, a tedy $E^1_{x,x} = E^2_{x,x}$ pro každé $x \in H$, takže $E^1 = E^2$. ∎

VĚTA 4.4

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální, E je spektrální míra pro T, $\lambda \in \sigma(T)$. Potom platí

(i) $\operatorname{Rng} E(\{\lambda\}) = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$,

(ii) $\lambda \in \sigma_p(T)$, právě když $E(\{\lambda\}) \neq 0$,

(iii) jestliže je λ izolovaný bod $\sigma(T)$, potom $\lambda \in \sigma_p(T)$.

DŮKAZ

(i) $\subseteq$ Platí $(\lambda - z) \cdot \chi_{\{\lambda\}}(z) = 0$, a tedy $(\lambda I - T) E_{\{\lambda\}} = 0$. Máme tak $\operatorname{Rng} E_{\{\lambda\}} \subseteq \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$.

$\supseteq$ Označme $B_m = \{z \in \sigma(T);\ |z - \lambda| \geq \frac{1}{m}\}$. Položme

$$f_m(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda - z}, & z \in B_m; \\ 0, & z \in \sigma(T) \setminus B_m. \end{cases}$$

Máme $f_m \in B^b(\sigma(T))$. Potom

$$f_m(T)(\lambda I - T) = \chi_{B_m}(T). \qquad (*)$$

Pro $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ máme $f_m(T)(\lambda I - T)x = f_m(T)0 = 0$. Takže podle $(*)$ platí také $\chi_{B_m}(T)x = 0$. Potom můžeme psát:

$$(x, y) = ((1 - \chi_{B_m})(T)x, y) \to (\chi_{\{\lambda\}}(T)x, y) = (E_{\{\lambda\}}x, y).$$

Odtud plyne $x = E_{\{\lambda\}}x$, a tedy $x \in \operatorname{Rng} E_{\{\lambda\}}$.

(ii) Platí: $\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow E(\{\lambda\}) \neq 0$

(iii) Množina $\{\lambda\}$ je otevřená v $\sigma(T)$, a tedy $E(\{\lambda\}) \neq 0$ podle VĚTY 4.1 (iii) a VĚTY 4.3. ∎

KONEC 9. PŘEDNÁŠKY, 20.4.2011

8. Distribuce – základní pojmy

OZNAČENÍ

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina.

(i) Označme prostor testovacích funkcí

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{E}^\infty(\Omega);\ \operatorname{supp}\varphi \text{ je kompaktní podmnožina } \Omega\}.$$

Dále pro $K \subset \Omega$ kompaktní označme

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega);\ \operatorname{supp}\varphi \subset K\}.$$

(ii) Jestliže $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$, potom $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ a

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

(iii) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená, $K \subset \Omega$ a $N \in \mathbb{N}_0$. Potom

$$\|\varphi\|_{N,K} = \sup\{|D^\alpha \varphi(x)|;\ x \in K, |\alpha| \le N\}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

ÚMLUVA

Symbol Ω bude až do konce kursu označovat otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^m$.

POZNÁMKA

Funkce
$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1 - \|x\|^2}\right), & \|x\| \le 1, \\ 0, & \|x\| > 1, \end{cases}$$

patří do $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

LEMMA 8.1

Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Potom je integrál

$$f * g(x) = \int f(x-y) g(y)\, dy$$

konečný s.v. a $f * g$ patří do $L^1(\mathbb{R}^m)$.

DŮKAZ

Můžeme předpokládat, že f a g jsou borelovské. Zobrazení $[x,y] \mapsto [x-y, y]$ je spojité, $[u,v] \mapsto f(u)g(v)$ je borelovské, a tedy $[x,y] \mapsto f(x-y)g(y)$ je borelovské, tedy je měřitelné.

Potom máme

$$\iint |f(x-y)g(y)|\,dx\,dy = \int\left(\int |f(x-y)|\,dx\right)|g(y)|\,dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 .$$

Odtud plyne podle Fubiniovy věty $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty$.

DEFINICE

Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom funkci $f*g$ nazýváme konvoluce funkcí f a g.

VĚTA 8.2 (vlastnosti konvoluce)

Nechť $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom platí:

(i) $f*g = g*f$ (komutativita),

(ii) $(f*g)*h = f*(g*h)$ (asociativita),

(iii) $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$,

(iv) pro každou φ spojitou s kompaktním nosičem platí

$\operatorname{supp}(f*\varphi) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(\varphi)$,

(v) pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ platí $D^\alpha(f*\varphi) = f*D^\alpha\varphi$.

DŮKAZ

(i) $f*g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy = \int f(z)g(x-z)\,dz = g*f(z)$

$x-y=z$

Jacobián $= (-1)^n$

(ii) $(f*g)*h(x) = \int (f*g)(x-y)\,h(y)\,dy = \iint f(x-y-z)g(z)h(y)\,dz\,dy$

$z = w-y$

$$= \iint f(x-w)\,g(w-y)\,h(y)\,dw\,dy$$

$$= \int f(x-w)\,g*h(w)\,dw = f*(g*h)(x)$$

(iii) Plyne z předchozího důkazu.

(iv) $f*g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy = \int\limits_{\operatorname{supp} g \,\cap\, (x-\operatorname{supp} f)} f(x-y)g(y)\,dy$

$f*g(x) \neq 0 \Rightarrow \exists y \in \operatorname{supp} g \cap (x - \operatorname{supp} f) \Rightarrow y = x-u$

Máme tedy $x = y+u \in \operatorname{supp} g + \operatorname{supp} f$

(v) $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int f(x-y)\varphi(y)\,dy\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int f(y)\varphi(x-y)\,dy\right)$

$= \int \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(y)\varphi(x-y)\right)dy = \int f(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x-y)\,dy = f * \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)$

Zaměně $\int$ a $\frac{\partial}{\partial x_i}$: $\quad \left|f(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x-y)\right| \leq c\cdot|f(y)|$ ■

POZNÁMKA

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\int\varphi = 1$, $\varphi \geq 0$. Označme $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$.
Potom pro $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ platí $f * \varphi_r(x) \rightrightarrows f(x)$.

$$\int \varphi_r(x)\,dx = \frac{1}{r^n}\int\varphi\left(\tfrac{x}{r}\right)dx \underset{\frac{x}{r}=y}{=} \int\varphi(y)\,dy = 1$$

$$|f*\varphi_r(x) - f(x)| = \left|\int (f(x-y)-f(x))\varphi_r(y)\,dy\right| \leq \int \underbrace{|f(x-y)-f(x)|}_{\leq\varepsilon}\cdot\varphi_r(y)\,dy$$

DEFINICE

(i) Řekneme, že posloupnost (φ_k) funkcí z $\mathcal{D}(\Omega)$ **konverguje k $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ v $\mathcal{D}(\Omega)$**, jestliže platí

(a) existuje kompakt $K \subseteq \Omega$ takový, že $\operatorname{supp}\varphi_k \subseteq K$ pro každé $k \in \mathbb{N}$,

(b) $\partial^\alpha\varphi_k \rightrightarrows \partial^\alpha\varphi$ na K pro každé α.

(ii) **Distribucí na Ω** rozumíme lineární zobrazení $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) takové, že $\Lambda(\varphi_k) \to \Lambda(\varphi)$, kdykoliv $\varphi_k \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$. Množinu všech distribucí značíme **$\mathcal{D}'(\Omega)$**.

PŘÍKLADY

(1) Pro $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ definujeme **$\Lambda_f(\varphi)$** $= \int f\varphi$.

- Λ_f je dobře definované a lineární
- $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \exists K \subset \Omega$ kompakt: $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na K, a tedy

$$\Lambda_f(\varphi_n) = \int f\varphi_n \to \int f\varphi = \Lambda_f(\varphi).$$

Distribuce tvaru Λ_f, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, nazýváme **regulární distribuce**.

(2) Pro Radonovu míru μ na Ω definujeme Λ_μ předpisem $\Lambda_\mu(\varphi) = \int \varphi \, d\mu$.
Obdobně jako v předchozím případě dostaneme $\Lambda_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
Je-li δ_0 Diracova míra s nosičem $\{0\}$, potom $\Lambda_{\delta_0}(\varphi) = \varphi(0)$.

(3) Další příklad distribuce: $\Lambda \varphi = \varphi'(0)$.

LEMMA 8.3

Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní. Položme

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}, \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Potom

(i) $(\mathcal{D}_K(\Omega), d)$ je úplný metrický prostor,

(ii) posloupnost (φ_j) funkcí z $\mathcal{D}_K(\Omega)$ konverguje k $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ právě tehdy, když $d(\varphi_j, \varphi) \to 0$.

DŮKAZ

(i) d je metrika

- d je dobře definované, $d(\varphi, \psi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \psi$, $d(\varphi, \psi) = d(\psi, \varphi)$ ... O.K.
- trojúhelníková nerovnost plyne ze vztahu

$$\min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\} \leq \min\{\|\varphi - \xi\|_N, 1\} + \min\{\|\xi - \psi\|_N, 1\}.$$

úplnost: Nechť (φ_j) je cauchyovská, potom pro každé α je $(D^\alpha \varphi_j)$ stejnoměrně cauchyovská, a tedy $D^\alpha \varphi_j \rightrightarrows g_\alpha$ na Ω pro jistou g_α.
Označme $\varphi = g_{(0,\dots,0)}$. Z VĚTY 13.6 MA2a plyne $g_\alpha = D^\alpha \varphi$. Máme tedy $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Potom $\varphi_j \xrightarrow{d} \varphi$ podle následujícího kroku.

KONEC 10. PŘEDNÁŠKY, 27.4.2011

(ii) Jestliže $\varphi_j \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, potom $\sum_{N=0}^{M} 2^{-N} \min\{\|\varphi_j - \varphi\|_M, 1\} \to 0$,
takže

$$\overline{\lim}\, d(\varphi_j, \varphi) \leq \sum_{N=M+1}^{\infty} 2^{-N} = 2^{-M}.$$

Odtud plyne $\lim d(\varphi_j, \varphi) = 0$.

Pokud $d(\varphi_k, \varphi) \to 0$, potom $\|\varphi_k - \varphi\|_N \to 0$ pro každé $N \geq 0$, neboť $\|\varphi_k - \varphi\| \leq 2^N d(\varphi_k, \varphi)$ pro dostatečně velká k. ∎

LEMMA 8.4

Nechť $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ je lineární. Potom je ekvivalentní:

(i) $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)'$

(ii) pro každý kompakt K existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ takové, že

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : |\Lambda \varphi| \leq C \|\varphi\|_N .$$

DŮKAZ

(i) => (ii) Zvolme $K \subset \Omega$ kompaktní. Předpokládejme, že (ii) neplatí. Potom pro každé N nalezneme $\varphi_N \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ takové, že $\|\varphi_N\| < 2^{-N}$ a $|\Lambda \varphi_N| \geq 1$. Potom $\varphi_N \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, ale $\Lambda \varphi_N \not\to 0$, což je spor.

(ii) => (i) Pokud $\varphi_k \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, pak existuje $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq K$. Potom pro K nalezneme příslušná C a N. Máme potom $|\Lambda(\varphi_k - \varphi)| \leq C \|\varphi_k - \varphi\|_N$. Odtud plyne $\Lambda(\varphi_k - \varphi) \to 0$, takže $\Lambda \varphi_k \to \Lambda \varphi$. ∎

DEFINICE

Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Jestliže existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každý kompakt $K \subset \Omega$ existuje $C \in \mathbb{R}$ splňující

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : |\Lambda \varphi| \leq C \|\varphi\|_N ,$$

potom nejmenší N s touto vlastností nazýváme řádem distribuce Λ. Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

PŘÍKLAD

Distribuce Λ_f je řádu 0, $\Lambda(\varphi) = \varphi'(0)$ je řádu 1.

LEMMA 8.5

Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Potom zobrazení z $\mathcal{D}(\Omega)$ do $\mathbb{C}$ definovaná předpisem $\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi)$ a $\varphi \mapsto \Lambda(f\varphi)$ jsou distribuce.

DŮKAZ

Linearita je v obou případech zřejmá. Nechť $\varphi_k \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$. Nalezneme kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ a $D^\beta \varphi_k \rightrightarrows D^\beta \varphi$ na K pro každý multiindex β. Potom $D^{\alpha+\beta} \varphi_k \rightrightarrows D^{\alpha+\beta} \varphi$ na K, a tedy $(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi_k \to (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$.

$\varphi \mapsto \Lambda(f\varphi)$ Platí: $D^\alpha(f\varphi) = \sum\limits_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} D^{\alpha-\beta} f \cdot D^\beta \varphi$, kde $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ a $\beta \leq \alpha$ značí $\beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$. Odtud $D^\alpha(f\varphi_k) \rightrightarrows D^\alpha(f\varphi)$ na K. ■

DEFINICE

Distribuce z předchozího lemmatu nazýváme po řadě **derivací řádu α distribuce Λ** a **součinem funkce f a distribuce Λ**. Značíme $D^\alpha \Lambda$ a $f\Lambda$.

POZNÁMKA

Jestliže $f \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, potom
$$f\Lambda_g(\varphi) = \Lambda_g(f\varphi) = \int gf\varphi = \Lambda_{gf}(\varphi).$$

VĚTA 8.6

Jestliže je f absolutně spojitá funkce na intervalu (a,b), potom $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$.

DŮKAZ

Zřejmě $f \in L^1_{loc}(a,b)$. Dále $f' \in L^1_{loc}(a,b)$ podle VĚTY 16.1 (i) MA2b.

Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, kde $\operatorname{supp} \varphi \subset [c,d] \subset (a,b)$.
$$\Lambda_f'(\varphi) = -\Lambda_f(\varphi') = -\int f\varphi' = -\int_c^d f\varphi' \underset{\text{VĚTA 16.2 MA2b}}{=} -[f\varphi]_c^d + \int_c^d f'\varphi = \int_c^d f'\varphi = \int f'\varphi = \Lambda_{f'}.$$
■

DEFINICE

Řekneme, že posloupnost $\{\Lambda_k\}$ distribucí z $\mathcal{D}'(\Omega)$ **konverguje k distribuci** $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, jestliže $\Lambda_k \varphi \to \Lambda\varphi$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

VĚTA 8.7

Nechť X je úplný metrický prostor, Y je metrický prostor, $f_n : X \mapsto Y$, $f_n \to f$ a f_n jsou spojité. Pak existuje bod spojitosti f.

BEZ DŮKAZU

VĚTA 8.8 (Banach-Steinhausova věta pro distribuce)

Nechť $\Lambda_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, a $\Lambda_k(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Potom $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a $D^\alpha \Lambda_k \to D^\alpha \Lambda$ pro každé α.

DŮKAZ

Linearita Λ. Zřejmé.

„Spojitost" Λ. Nechť $\varphi_k \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$. Nalezneme kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq K$ pro každé k. Máme tedy $\varphi_k, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Zobrazení $\tilde{\Lambda} := \Lambda|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ je podle VĚT 8.5 a 8.6 spojité v jistém $\psi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Potom platí
$\varphi_k - \varphi + \psi \xrightarrow{d} \psi$, a tedy $\tilde{\Lambda}(\varphi_k - \varphi + \psi) \to \tilde{\Lambda}(\psi)$. Z linearity dostáváme
$\tilde{\Lambda}\varphi_k \to \tilde{\Lambda}\varphi$, takže také $\Lambda\varphi_k \to \Lambda\varphi$.

Konvergence derivací. $D^\alpha \Lambda_k(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda_k(D^\alpha \varphi) \to (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi) = D^\alpha \Lambda(\varphi)$.

∎

PŘÍKLADY

Viz cvičení.

9. Fourierova transformace

DEFINICE

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Fourierovu transformaci funkce f definujeme předpisem

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

POZNÁMKA

1, Symbol $\langle x,\xi\rangle$ značí skalární součin, tj. $\langle x,\xi\rangle = x_1\xi_1 + \dots + x_m\xi_m$.
2, Hodnota $\hat{f}(\xi)$ je dobře definována, neboť $|f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}| = |f(x)|$.
3, Pro každé $\xi \in \mathbb{R}^m$ platí $|\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$.
4, Normalizační význam členu $(2\pi)^{-m/2}$.
5, Souvislost s Fourierovými řadami.

DEFINICE

Schwartzův prostor $\mathcal{S}$ je množina všech funkcí $f \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^m)$, které splňují

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} (1 + \|x\|^2)^N |D^\alpha f(x)| < \infty$$

pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ a $N \in \mathbb{N}_0$.

POZNÁMKA

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^m)$

OZNAČENÍ

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$

KONEC 11. PŘEDNÁŠKY, 4.5.2011

VĚTA 9.1

Nechť $\varphi \in \mathcal{S}$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$. Potom

(i) $\hat{\varphi} \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^m)$ a $D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \varphi}(\xi)$,

(ii) $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$,

(iii) $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

DŮKAZ

(i) Počítejme

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}(2\pi)^{-m/2}\int \varphi(x)e^{-ix\xi}dx \overset{(*)}{=} (2\pi)^{-m/2}\int \varphi(x)e^{-ix\xi}(-ix_j)dx = (-i)\widehat{x_j\varphi}(\xi)$$

(*) $|\varphi(x)e^{-ix\xi}(-ix_j)| = |x_j\varphi(x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$

Tvrzení pak plyne z výše uvedeného.

(ii) Nechť $j \in \{1,\dots,m\}$. Pro pevné $x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_m$ počítejme

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)e^{-i\xi x}dx_j = \lim_{y\to\infty}\int_{-y}^{y}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)e^{-i\xi x}dx_j = \lim_{y\to\infty}\left([\varphi(x)e^{-i\xi x}]_{-y}^{y} - \int_{-y}^{y}\varphi(x)(-i\xi_j)e^{-i\xi x}dx\right)$$

$$= (i\xi_j)\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)e^{-i\xi x}dx_j$$

Podle Fubiniovy věty dostaneme

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)e^{-i\xi x}dx = \int_{\mathbb{R}^{m-1}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}e^{-i\xi x}dx_j\, dx_1\dots dx_{j-1}dx_{j+1}\dots dx_m$$

$$= i\xi_j\int\varphi(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Odtud plyne $\widehat{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j\hat{\varphi}(\xi)$. Iterací výše uvedeného dostaneme požadované tvrzení.

$$\widehat{x^\alpha f} = \frac{1}{(-1)^{|\alpha|}i^{|\alpha|}}D^\alpha\hat{f} = i^{|\alpha|}D^\alpha\hat{f}$$

(iii) Nechť $\varphi \in \mathcal{S}$. $\quad (1+\|\xi\|^2)^N D^\alpha\hat{\varphi}(\xi)$

Položme $\psi(x) = (-i)^{|\alpha|}x^\alpha\varphi(x)$. Potom

$$\hat{\psi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|}(i)^{|\alpha|}D^\alpha\hat{\varphi} = D^\alpha\hat{\varphi}$$

$$\xi^\beta D^\alpha\hat{\varphi}(\xi) = \xi^\beta\hat{\psi} \overset{(ii)}{=} (-i)^{|\beta|}\widehat{D^\beta\psi}(\xi)$$

Odtud plyne, že $\xi \mapsto \xi^\beta D^\alpha\hat{\varphi}(\xi)$ je omezená funkce pro každé α,β. ∎

OZNAČENÍ

$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) = \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m);\ \forall \varepsilon > 0 : \{x \in \mathbb{R};\ |f(x)| > \varepsilon\} \text{ je omezená} \}$

VĚTA 9.2

Fourierova transformace je spojitý lineární operátor z $L^1(\mathbb{R}^m)$ do $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$.

DŮKAZ

Linearita. Zřejmé.

Spojitost. Platí $|\hat f(\xi_1) - \hat f(\xi_2)| \leq (2\pi)^{-m/2} \int \underbrace{|f(x)|\,|e^{-i\xi_1 x} - e^{-i\xi_2 x}|}_{\leq 2|f(x)| \text{ ... integrovatelná majoranta}}\,dx \xrightarrow{\text{Lebesgueova věta}} 0,\ \xi_2 \to \xi_1.$

$\hat f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$. Nalezneme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}$ takové, že $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$.
Potom

$$|\hat f(\xi)| \leq (2\pi)^{-m/2}\varepsilon + |\hat\varphi(\xi)|.$$

Máme $\hat\varphi \in \mathcal{S}$, což dává s předchozím dokazované tvrzení. ∎

VĚTA 9.3

Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Potom platí

(i) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{m/2}\, \hat f \cdot \hat g$,

(ii) $\int \hat f g = \int f \hat g$.

DŮKAZ

(i) $(2\pi)^{-m/2} \int f*g(x) e^{-ix\xi}\,dx = (2\pi)^{-m/2} \iint f(x-y) g(y) e^{-ix\xi}\,dy\,dx$

$$= (2\pi)^{-m/2} \iint f(x-y) e^{-i(x-y)\xi} g(y) e^{-iy\xi}\,dy\,dx$$

$$= \hat f(\xi) \int g(y) e^{-iy\xi}\,dy = \hat f(\xi)\,(2\pi)^{m/2}\,\hat g(\xi).$$

(ii) $\int \hat f(\xi) g(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-m/2} \iint f(x) e^{-ix\xi} g(\xi)\,dx\,d\xi = \int f(x)\hat g(x)\,dx$ ∎

LEMMA 9.4

Nechť $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Potom $\varphi \in \mathcal{S}$ a $\hat{\varphi} = \varphi$.

DŮKAZ

$\varphi \in \mathcal{S}$. Přímočaré!

Případ $n = 1$. Funkce φ řeší diferenciální rovnici $\varphi' + x\varphi = 0$.

Funkce $\hat{\varphi}$ splňuje podle VĚTY 9.1:

$$\hat{\varphi}'(\xi) = (-i)\,\widehat{x\varphi}(\xi)$$

$$\xi\hat{\varphi}(\xi) = (-i)\,\widehat{\varphi'}(\xi).$$

Potom máme $\hat{\varphi}' + \xi\hat{\varphi} = (-i)\,\widehat{\varphi' + x\varphi}(\xi) = 0.$

Dále máme $\varphi(0) = 1$ a

$$\hat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-1/2}\int e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = 1.$$

Odtud plyne $\hat{\varphi} = \varphi$.

Obecný případ. Platí

$$\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2 - ix\xi}\,d\xi = \prod_{j=1}^{n}(2\pi)^{-1/2}\int e^{-\frac{1}{2}x_j^2 - ix_j\xi_j}\,dx_j$$

$$= \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}\xi_j^2} = e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2}.$$

∎

VĚTA 9.5 (o inverzi)

(i) Fourierova transformace je bijekce $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$ a platí

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2}\int \hat{\varphi}(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi.$$

(ii) Pro $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ platí $\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \langle \hat{\varphi}, \hat{\psi} \rangle_{L^2}$.

(iii) Jestliže $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, potom

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2}\int \hat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi$$

pro s.v. $x \in \mathbb{R}^n$.

DŮKAZ

(i) Všimněme si, že pro $\lambda>0$ a funkci $g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\hat{h}(\xi)=\lambda^n\hat{g}(\lambda\xi),\ \text{kde}$$

$h(x)=g(x/\lambda)$. Platí totiž

$$\hat{h}(\xi)=\int g\left(\frac{x}{\lambda}\right)e^{-ix\xi}dx=\int g(y)e^{-i\lambda y\xi}\lambda^n dy=\lambda^n\hat{g}(\lambda\xi).$$

Označme $\psi(x)=e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$, $x\in\mathbb{R}^n$. Potom platí

$$\int\varphi(\xi)\lambda^n\hat{\psi}(\lambda\xi)d\xi\underset{\lambda\xi=\eta}{=}\int\varphi\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)\hat{\psi}(\eta)d\eta$$

$$=\int\hat{\varphi}(\xi)\psi\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)d\xi.$$

Pro $\lambda\to\infty$ máme $\varphi(\eta/\lambda)\to\varphi(0)$, $\psi(\xi/\lambda)\to\psi(0)=1$.
Limitním přechodem tak dostaneme

$$\int\varphi(0)\psi(\eta)d\eta=\int\hat{\varphi}(\xi)d\xi$$

$$\varphi(0)\int\psi(\eta)d\eta=\int\hat{\varphi}(\xi)d\xi$$

$$\varphi(0)=(2\pi)^{-n/2}\int\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

KONEC 12. PŘEDNÁŠKY, 4. 5. 2011

Položme $\varrho(y)=\psi(x+y)$ pro pevné $x\in\mathbb{R}^n$. Potom

$$(2\pi)^{n/2}\psi(x)=(2\pi)^{n/2}\varrho(0)=\int\hat{\varrho}(\xi)d\xi=\iint\varrho(y)e^{-iy\xi}dy\,d\xi$$

$$=\iint\psi(x+y)e^{-iy\xi}dy\,d\xi\qquad y=z-x$$

$$=\iint\psi(z)e^{-iz\xi}e^{ix\xi}dz\,d\xi=\int\hat{\psi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

Podle již dokázaného máme $\varphi(-x)=\hat{\hat{\varphi}}(x)$, a tedy $\varphi=\hat{\hat{\hat{\hat{\varphi}}}}$, tj. $\varphi=\hat{\psi}$, kde $\psi=\hat{\hat{\hat{\varphi}}}\in\mathcal{S}$. Fourierova transformace zobrazuje tedy $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$.

(ii) $\int \varphi \overline{\psi} = \int \overline{\psi(x)} \int \hat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi\, dx = \int \hat{\varphi}(\xi) \overline{\int \psi(x) e^{-ix\xi} dx}\, d\xi$

$= \int \hat{\varphi}(\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)}\, d\xi$

(iii) Označme

$$f_0(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

Pro $g \in \mathcal{S}$ máme

$$\int f \hat{g} = \int \hat{f} g = \int \hat{f}(x) g(x) dx = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(x) \int \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi\, dx$$

$$= \int f_0(\xi) \hat{g}(\xi)\, d\xi.$$

Máme tedy $\int (f_0 - f)\varphi = 0$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Odtud plyne $f_0 = f$ s.v. ∎

VĚTA 9.6 (Plancherelova věta)

Existuje právě jedna izometrie $F: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ taková, že $Ff = \hat{f}$ pro $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

NÁZNAK DŮKAZU

- $\mathcal{S}$ je husté v $L^1(\mathbb{R}^n)$ i v $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ pro $f \in \mathcal{S}$.
- spojité rozšíření na $L^2(\mathbb{R}^n)$.

10. Temperované distribuce

OZNAČENÍ

Pro $\varphi \in \mathcal{S}$, $N \in \mathbb{N}_0$, položme

$$p_N(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^N |D^\alpha \varphi(x)|.$$

DEFINICE

Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ prvků z $\mathcal{S}$ konverguje k $\varphi \in \mathcal{S}$ v $\mathcal{S}$, jestliže pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ platí $p_N(\varphi_n - \varphi) \to 0$.

VĚTA 10.1

(i) Jestliže $\{\varphi_n\}$ konverguje k φ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, potom $\{\varphi_n\}$ konverguje k φ v $\mathcal{S}$.

(ii) Pro každé $\psi \in \mathcal{S}$, $\varepsilon > 0$ a $N \in \mathbb{N}_0$ existuje $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ takové, že $p_N(\psi - \varphi) < \varepsilon$.

DŮKAZ

(i) Nalezneme kompakt $K \subset \mathbb{R}^n$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq K$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K$. Potom $P \cdot D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows P D^\alpha \varphi$ na K pro libovolné α a libovolný polynom P.

(ii) Zvolme $\psi \in \mathcal{S}$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ takové, že $\varphi(x) = 1$ na $B(0,1)$. Položme

$$\varphi_r(x) = \psi(x) \cdot \varphi(rx), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ r > 0.$$

Potom $\varphi_r \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Pro polynom P a multiindex α potom platí

$$P(x) \, D^\alpha (\varphi_r(x) - \psi(x)) = P(x) \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} D^{\alpha-\beta} \psi(x) \, D^\beta (\varphi(r \cdot) - 1)(x).$$

Poněvadž $\psi \in \mathcal{S}$ a $\varphi \in \mathcal{S}$ máme $P D^{\alpha-\beta} \psi \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^n)$ a $\|D^\beta(\varphi - 1)\|_\infty < \infty$ pro každé $\beta \leq \alpha$. Potom

$$|P(x) D^\alpha(\varphi_r(x) - \psi(x))| \leq \begin{cases} \sum\limits_{\beta \leq \alpha, \beta \neq 0} |c_{\alpha\beta}| \, \|P D^{\alpha-\beta} \psi\|_\infty \, r^{|\beta|} \, \|D^\beta(\varphi - 1)\|_\infty, & x \in B(0, \frac{1}{r}), \\ \sum\limits_{\beta \leq \alpha} |c_{\alpha\beta}| \, \|P D^{\alpha-\beta} \psi\|_\infty \, r^{|\beta|} \, \|D^\beta(\varphi - 1)\|_\infty, & x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, \frac{1}{r}). \end{cases}$$

Odtud již plyne $P D^\alpha(\varphi_r - \psi) \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}^n$. ∎

DEFINICE

Temperovanou distribucí rozumíme lineární zobrazení $\Lambda : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ takové, že pro každou posloupnost $\{\varphi_n\}$ prvků $\mathcal{S}$ konvergující k $\varphi \in \mathcal{S}$ v $\mathcal{S}$ platí $\Lambda\varphi_n \to \Lambda\varphi$.

POZNÁMKA

Platí $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, potom $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathcal{S}$. Jestliže $\Lambda \in \mathcal{S}'$, potom $\Lambda|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

PŘÍKLADY

(1) Jestliže $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $\int (1+\|x\|^2)^{-N} |f(x)|\,dx < \infty$ potom $\Lambda_f \in \mathcal{S}'$.

(2) Jestliže $f(x) = \exp(\|x\|^2)$, potom $\Lambda_f \notin \mathcal{S}'$, ale $\Lambda_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

(3) Jestliže $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$, $\mu \geq 0$, $\int (1+\|x\|^2)^{-k}\,d\mu(x) < \infty$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, potom $\Lambda_\mu \in \mathcal{S}'$.

(4) Jestliže $\Lambda \in \mathcal{S}'$, P je polynom, $f \in \mathcal{S}$, potom

$$D^\alpha\Lambda : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi),$$
$$P\Lambda : \varphi \mapsto \Lambda(P\varphi),$$
$$f\Lambda : \varphi \mapsto \Lambda(f\varphi)$$

jsou temperované distribuce.

(5) Jestliže $\Lambda \in \mathcal{S}'$, potom zobrazení $\varphi \mapsto \Lambda(\hat{\varphi})$ je temperovaná distribuce.

[$\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ $D^\beta(x^\alpha\varphi_k) \xrightarrow{L^1} 0$ pro každé α, β. Potom
$$\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}_k = \xi^\beta (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha\varphi_k} = (-i)^{|\alpha|}(-i)^{|\beta|}\widehat{D^\beta(x^\alpha\varphi_k)} = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\widehat{D^\beta(x^\alpha\varphi_k)} \rightrightarrows 0 \text{]}$$

DEFINICE

Nechť Λ je temperovaná distribuce. Fourierovou transformací rozumíme temperovanou distribuci $\hat{\Lambda}$ definovanou předpisem $\hat{\Lambda}(\varphi) = \Lambda(\hat{\varphi})$, $\varphi \in \mathcal{S}$.

POZNÁMKA

(i) Jestliže $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, potom $\widehat{\Lambda_f}(\varphi) = \Lambda_f(\hat{\varphi}) = \int f \hat{\varphi} = \int \hat{f} \varphi = \Lambda_{\hat{f}}(\varphi)$.

(ii) Jestliže $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$, potom také $\widehat{\Lambda_f} = \Lambda_{Ff} \in \mathcal{S}'$.

PŘÍKLADY

(1) $\widehat{\Lambda_{\delta_0}} = \Lambda_{\delta_0}(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)\,dx = \Lambda_1(\varphi)$ $\qquad \hat{\delta_0} = 1$

(2) $\widehat{\Lambda_1}(\varphi) = \Lambda_1(\hat{\varphi}) = \int \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \varphi(0) = \Lambda_{\delta_0}(0)$ $\qquad \hat{1} = \delta_0$

VĚTA 10.2

Fourierova transformace je lineární bijekce $\mathcal{S}'$ na $\mathcal{S}'$ splňující podmínku: jestliže $\Lambda_k\varphi \to \Lambda\varphi$ pro každé $\varphi \in \mathcal{S}$, potom $\hat{\Lambda}_k\varphi \to \hat{\Lambda}\varphi$ pro každé $\varphi \in \mathcal{S}$. Dále platí $\hat{\hat{\hat{\hat{\Lambda}}}} = \Lambda$ pro každé $\Lambda \in \mathcal{S}'$.

DŮKAZ

Linearita. Zřejmé.

Prostota. $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2 \Rightarrow \Lambda_1(\hat{\varphi}) = \Lambda_2(\hat{\varphi})$ pro každé $\varphi \in \mathcal{S}$

Máme tedy $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

4-periodičnost. $\hat{\hat{\hat{\hat{\Lambda}}}}(\varphi) = \Lambda(\hat{\hat{\hat{\hat{\varphi}}}}) = \Lambda(\varphi)$

Surjektivita. Plyne z 4-periodičnosti.

Spojitost. $\Lambda_k \to \Lambda \Rightarrow \Lambda_k(\hat{\varphi}) \to \Lambda(\hat{\varphi}) \Rightarrow \hat{\Lambda}_k(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$. ∎

VĚTA 10.3

Nechť $\Lambda \in \mathcal{S}'$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$. Potom platí

- $\widehat{D^\alpha \Lambda} = i^{|\alpha|} x^\alpha \hat{\Lambda}$,
- $D^\alpha \hat{\Lambda} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \Lambda}$.

DŮKAZ

Tvrzení plyne z VĚTY 9.1. ∎

KONEC 13. PŘEDNÁŠKY, 11.5.2011