Aditivní systémy borelovských množin

Téma diplomové práce

Jedním z důležitých problémů neseparabilní deskriptivní teorie je otázka, zda každý bodově spočetný borelovsky aditivní systém $\mathcal{S}$ v úplném metrickém prostoru je σ-diskrétně zjemnitelný. Uvedený problém hraje klíčovou roli při hledání měřitelných selektorů pro vícehodnotová zobrazení. Odpověď na něj je pozitivní, pokud předpokládáme, že systém $\mathcal{S}$ je F_σ-aditivní ([2]), G_δ-aditivní ([3]) nebo dokonce jen $F_{\sigma\delta}$-aditivní ([4]). Také je známo, že za dodatečného množinového axiomu je odpověď na uvedenou otázku kladná (W. G. Fleissner, [1]). V ZFC je problém stále otevřený.

Předmětem práce je seznámit se s výše uvedenými pojmy neseparabilní deskriptivní teorie množin, prostudovat práci [4], výsledky přehledně sepsat a případně se pokusit o prohloubení výsledků z [4].

Definice výše uvedených pojmů následují. Nechť X je metrický prostor a $\mathcal{A}$ je systém podmnožin prostoru X.

- Systém $\mathcal{A}$ je *diskrétní*, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje jeho okolí protínající nejvýše jeden prvek $\mathcal{A}$.
- Jestliže $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$, kde $\mathcal{A}_n$ je diskrétní, pak říkáme, že $\mathcal{A}$ je *σ-diskrétní*.
- Systém $\mathcal{R}$ je *zjemněním* $\mathcal{A}$, jestliže $\bigcup \mathcal{R} = \bigcup \mathcal{A}$ a pro každé $R \in \mathcal{R}$ existuje $A \in \mathcal{A}$ splňující $R \subset A$.
- Systém $\mathcal{A}$ je *σ-diskrétně zjemnitelný*, jestliže existuje zjemnění $\mathcal{A}$, které je σ-diskrétní.
- Jestliže $\mathcal{B}$ je systém podmnožin X, pak systém $\mathcal{A}$ se nazývá *$\mathcal{B}$ aditivní*, jestliže $\bigcup \mathcal{A}' \in \mathcal{B}$ pro každé $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.
- Systém $\mathcal{A}$ je *bodově spočetný*, jestliže $\{A \in \mathcal{A};\ x \in A\}$ je spočetný pro každé $x \in X$.
- Prostor X je *absolutně suslinovský*, jestliže X je homeomorfní suslinovské podmnožině úplného metrického prostoru.

Literatura

1. W. G. Fleissner, *An axiom for nonseparable Borel theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 309–328. MR 531982 (83c:03043)
2. R. W. Hansell, *F_σ-set covers of analytic spaces and first class selectors*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), no. 2, 365–371. MR 818473 (87g:54084)
3. J. Spurný, *G_δ-additive families in absolute Souslin spaces and Borel measurable selectors*, Topology Appl. **154** (2007), no. 15, 2779–2785. MR 2344741 (2008h:54043)
4. J. Spurný and M. Zelený, *Additive families of low Borel classes and Borel measurable selectors*, Canad. Math. Bull. (2011), no. 54, 180–192.