

Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (A)

LS 1996-1997

Příklad 1.: Nalezněte všechna řešení rovnice

$$(1 - x^2)y' = 1 - y^2,$$

kteřá jsou definována na celém intervalu $(1, \infty)$ a splňují podmínku $y(x) \geq 1$ pro každé $x \in (1, \infty)$. (12 bodů)

Příklad 2.: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$(\cos x)y' = \sqrt{y} \sin x. \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 3.: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x. \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 4.: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}. \quad (13 \text{ bodů})$$

Příklad 5.: Nechtě $P = \mathbb{N}$ a $\rho : P \times P \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ je definována předpisem

$$\rho(n, m) = \begin{cases} \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}, & \text{pro } n \neq m, \\ 0, & \text{pro } n = m. \end{cases}$$

Dokažte:

- (i) Pak (P, ρ) je metrický prostor.
- (ii) Prostor (P, ρ) není kompaktní. (12 bodů)

Příklad 6.: Nalezněte všechny hladké funkce y , $y(0) = 2e^{\frac{1}{2}}$, $y(1) = 1 + e$ podezřelé z extrému pro funkcionál

$$V[y] = \int_0^1 (y^2 + 4yy' + 4y'^2) dt. \quad (13 \text{ bodů})$$

Příklad 7.: Nalezněte všechna $x_0 \in \mathbb{R}^3$ taková, že maximální řešení soustavy

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x$$

vyhovující počáteční podmínce $x(0) = x_0$ jsou periodická. (13 bodů)

Příklad 8.: Rozhodněte, zda stacionární řešení $x_1(t) = 0, x_2(t) = 0, x_3(t) = 0$ soustavy

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 9x_2^3, \\ x_2' &= -6x_2 - 5x_3 + 7x_3^5, \\ x_3' &= -x_3 + x_1^2 + x_2^2, \end{aligned}$$

je stabilní nebo nestabilní. (13 bodů)

Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (B)

LS 1996-1997

Příklad 1.: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = 2\sqrt{y} \operatorname{arctg} x. \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 2.: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = y\sqrt{1-y^2}. \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 3.: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{1}{1+e^{-t}}. \quad (13 \text{ bodů})$$

Příklad 4.: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + 2y'' + y' = x^2 + 9x. \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 5.: (i) Nechť $P = \mathbb{N}^2$ a $\rho : P \times P \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ je definována předpisem

$$\rho((n_1, n_2), (m_1, m_2)) = \max\{|n_1 - m_1|, |n_2 - m_2|\}.$$

Dokažte, že (P, ρ) je úplný metrický prostor, který není kompaktní.

(ii) Dokažte, že každá cauchyovská posloupnost je omezená (tj. existuje koule $B(x, r)$ obsahující všechny členy dané posloupnosti). (12 bodů)

Příklad 6.: Nalezněte všechny hladké funkce y , $y(0) = 2$, $y(2) = 2e^2 + e^{-2}$ podezřelé z extrému pro funkcionál

$$V[y] = \int_0^2 (2ye^t + y^2 + y'^2) dt. \quad (13 \text{ bodů})$$

Příklad 7.: Nalezněte všechna maximální řešení soustavy

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} x. \quad (13 \text{ bodů})$$

Příklad 8.: Nalezněte všechna stacionární řešení následující soustavy a rozhodněte o jejich stabilitě.

$$\begin{aligned} x' &= 1 - xy, \\ y' &= x - y^3. \end{aligned} \quad (13 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (C)

LS 1996-1997

Příklad 1.: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$(\cos y) y' = x \sin y. \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 2.: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \sin x \sin y. \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 3.: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 5y' + 6y = e^{3x}(2 + 3x + x^2)$$

splňující počáteční podmínku. (13 bodů)

Příklad 4.: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}. \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 5.: Dokažte následující větu: Nechť (K, ρ) je neprázdný kompaktní prostor a $f : K \rightarrow K$ splňuje následující vlastnost:

$$\forall x, y \in K, x \neq y : \rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y).$$

Potom existuje $x^* \in K$ takové, že $f(x^*) = x^*$. (13 bodů)

Návod: Vhodně užiďte pomocnou funkci $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $g(x) = \rho(x, f(x))$.

Příklad 6.: Nalezněte všechny hladké funkce y , $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$ podezřelé z extrému pro funkcionál

$$V[y] = \int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2) dt. \quad (13 \text{ bodů})$$

Příklad 7.: Nalezněte všechna maximální řešení soustavy

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} x \quad (13 \text{ bodů})$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = (1, 4, -7)$.

Příklad 8.: Nalezněte všechna stacionární řešení následující soustavy a rozhodněte o jejich stabilitě,

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y^2 - 1, \\ y' &= 2xy. \end{aligned} \quad (13 \text{ bodů})$$