

Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (A)

ZS 2003-2004

Příklad A1: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionálu $\int_0^6 (ty + 2(y')^2) dt$.

- (a) Napište Eulerovu rovnici.
- (b) Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- (c) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 1$, $y(6)$ volné.
- (d) Jsou nalezená řešení body minima nebo maxima? Zdůvodněte.
- (e) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 1$, $y(6) \geq 1$.
- (f) Jsou nalezená řešení body minima nebo maxima? Zdůvodněte.

Příklad A2: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionálu $\int_0^T (y + ty' - (y')^2) dt$.

- (a) Napište Eulerovu rovnici.
- (b) Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- (c) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 0$, $y(T) = 1$, T volné.
- (d) Co znamená výsledek úlohy (c)?
- (e) Pro pevné T najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 0$, $y(T) = 1$.
- (f) Jsou nalezená řešení body maxima nebo minima? Zdůvodněte.
- (g) Pro nalezená řešení spočítejte hodnotu funkcionálu a popište její závislost na T . Interpretujte výsledek.

Příklad A3: Uvažujme úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^4 3y$ za podmínek $y' = y + u$, $y(0) = 5$, $y(4) \geq 300$, $0 \leq u \leq 2$.

- (a) Najděte podezřelé body z extrému. (Nezapomeňte na zdůvodnění, proč v Hamiltoniánu je $\lambda_0 = 1$.)
- (b) Jde skutečně o maximum? Zdůvodněte.
- (c) Změní se výsledek, budeme-li uvažovat úlohu, v níž je $y(4)$ volné?

Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (B)

ZS 2003-2004

Příklad B1: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionálu $\int_0^1 (2ye^t + y^2 + (y')^2) dt$.

- (a) Napište Eulerovu rovnici.
- (b) Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- (c) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 0$, $y(1)$ volné.
- (d) Jsou nalezená řešení body minima nebo maxima? Zdůvodněte.
- (e) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 0$, $y(1) \geq 0$.
- (f) Jsou nalezená řešení body minima nebo maxima? Zdůvodněte.

Příklad B2: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionálu $\int_1^T \frac{(y')^2}{t^3} dt$.

- (a) Napište Eulerovu rovnici.
- (b) Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- (c) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(1) = 0$, $y(T) = 0$, T volné.
- (d) Co znamená výsledek úlohy (c)?
- (e) Pro pevné T najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(1) = 0$, $y(T) = 0$.
- (f) Jsou nalezená řešení body maxima nebo minima? Zdůvodněte.
- (g) Pro nalezená řešení spočítejte hodnotu funkcionálu a popište její závislost na T . Interpretujte výsledek.

Příklad B3: Uvažujme úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^T (-t^2 - u^2) dt$ za podmínek $y' = u$, $y(0) = 4$, $y(T) = 5$, T volné.

- (a) Najděte podezřelé body z maxima. (Nezapomeňte na zdůvodnění, proč v Hamiltoniánu je $\lambda_0 = 1$.)
- (b) Jde skutečně o maximum? Zdůvodněte. (Návod: Řešte tutéž úlohu s pevným T . Zdůvodněte, že v tomto případě jde skutečně o maximum. Spočítejte hodnotu funkcionálu pro nalezená řešení a analyzujte závislost na T .)

Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (C)

ZS 2003-2004

Příklad C1: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionalu $\int_0^7 ((y')^2 - 8ty + t) dt$.

- (a) Napište Eulerovu rovnici.
- (b) Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- (c) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 1$, $y(7)$ volné.
- (d) Jsou nalezená řešení body minima nebo maxima? Zdůvodněte.
- (e) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 0$, $y(7) \leq 1$.
- (f) Jsou nalezená řešení body minima nebo maxima? Zdůvodněte.

Příklad C2: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionalu $\int_0^T y^2 + 4yy' + 2(y')^2 dt$.

- (a) Napište Eulerovu rovnici.
- (b) Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- (c) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(1) = 0$, $y(T) = 1$, T volné.
- (d) Co znamená výsledek úlohy (c)?
- (e) Pro pevné T najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(1) = 0$, $y(T) = 1$.
- (f) Jsou nalezená řešení body maxima nebo minima? Zdůvodněte.
- (g) Pro nalezená řešení spočítejte hodnotu funkcionalu a popište její závislost na T . Interpretujte výsledek.

Příklad C3: Uvažujme úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^T e^{-rt}(1-u)y dt$ za podmínek $y' = uy$, $y(0) = 1$, $y(T)$ volné. ($T > 0$ a $r \in (0, 1)$ jsou dány.)

- (a) Najděte podezřelé body z maxima. (Nezapomeňte na zdůvodnění, proč v Hamiltoniánu je $\lambda_0 = 1$.) Provedte diskusi vlastností řešení v závislosti na T a r .
- (b) Jde skutečně o maximum? Zdůvodněte.

Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (D)

ZS 2003-2004

Příklad D1: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionálu $\int_1^2 te^{y'} dt$.

- (a) Napište Eulerovu rovnici.
- (b) Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- (c) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(1) = 0$, $y(2)$ volné.
- (d) Co znamená výsledek úlohy (c)?
- (e) Pro pevné Z najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(1) = 0$, $y(2) = Z$.
- (f) Jsou nalezená řešení body maxima nebo minima? Zdůvodněte.
- (g) Pro nalezená řešení spočtěte hodnotu funkcionálu a popište její závislost na Z . Interpretujte výsledek.

Příklad D2: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionálu $\int_0^T ty + 2(y')^2 dt$.

- (a) Napište Eulerovu rovnici.
- (b) Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- (c) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 1$, $y(T) = 1$, T volné.
- (d) Jsou nalezená řešení body minima nebo maxima? Zdůvodněte. (Návod: Pro pevné T najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 1$, $y(T) = 1$ a určete, zda nalezená řešení jsou body maxima nebo minima. Pro nalezená řešení spočtěte hodnotu funkcionálu a popište její závislost na T . Interpretujte výsledek.)

Příklad D3: Uvažujme úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^2 (3u - 2y) dt$ za podmínek $y' = u + y$, $y(0) = 5$, $y(2)$ volné, $0 \leq u \leq 2$.

- (a) Najděte podezřelé body z maxima. (Nezapomeňte na zdůvodnění, proč v Hamiltoniánu je $\lambda_0 = 1$.)
- (b) Jde skutečně o maximum? Zdůvodněte.

Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (E)

ZS 2003-2004

Příklad E1: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionalu $\int_0^5 ((y')^2 - 4ty + 5t) dt$.

- (a) Napište Eulerovu rovnici.
- (b) Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- (c) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 1$, $y(5)$ volné.
- (d) Jsou nalezená řešení body minima nebo maxima? Zdůvodněte.
- (e) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 1$, $y(5) \leq 1$.
- (f) Jsou nalezená řešení body minima nebo maxima? Zdůvodněte.

Příklad E2: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionalu $\int_1^T (y - ty' + (y')^2) dt$.

- (a) Napište Eulerovu rovnici.
- (b) Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- (c) Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(1) = 0$, $y(T) = 7$, T volné.
- (d) Co znamená výsledek úlohy (c)?
- (e) Pro pevné T najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(1) = 0$, $y(T) = 7$.
- (f) Jsou nalezená řešení body maxima nebo minima? Zdůvodněte.
- (g) Pro nalezená řešení spočítejte hodnotu funkcionalu a popište její závislost na T . Interpretujte výsledek.

Příklad E3: Uvažujme úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^5 (2y - 3u) dt$ za podmínek $y' = u + y$, $y(0) = 5$, $y(5)$ volné, $0 \leq u \leq 2$.

- (a) Najděte podezřelé body z maxima. (Nezapomeňte na zdůvodnění, proč v Hamiltoniánu je $\lambda_0 = 1$.)
- (b) Jde skutečně o maximum? Zdůvodněte.

Písenná zkouška a zápočet z Matematiky V pro FSV (F)

ZS 2003-2004

Příklad F1: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionálu $\int_0^T ty - 2(y')^2 dt$.

- Napište Eulerovu rovnici.
- Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 3$, $y(T) = 0$, T volné.
- Jsou nalezená řešení body minima nebo maxima? Zdůvodněte. (Návod: Pro pevné T najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 3$, $y(T) = 0$ a určete, zda nalezená řešení jsou body maxima nebo minima. Pro nalezená řešení spočítejte hodnotu funkcionálu a popište její závislost na T . Interpretujte výsledek.)

Příklad F2: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionálu $\int_2^9 \frac{(y')^2}{t^3} dt$.

- Napište Eulerovu rovnici.
- Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(2) = 13$, $y(9)$ volné.
- Jsou nalezená řešení body maxima nebo minima? Zdůvodněte.
- Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(2) = 13$, $y(9) \leq 11$.
- Jsou nalezená řešení body maxima nebo minima? Zdůvodněte.

Příklad F3: Uvažujme úlohu o hledání extrémů funkcionálu $\int_0^T y^2 - 7yy' + 2(y')^2 dt$.

- Napište Eulerovu rovnici.
- Najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
- Najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 0$, $y(T) = 1$, T volné.
- Co znamená výsledek úlohy (c)?
- Pro pevné T najděte podezřelé body z extrému za podmínek $y(0) = 0$, $y(T) = 1$.
- Jsou nalezená řešení body maxima nebo minima? Zdůvodněte.
- Pro nalezená řešení spočítejte hodnotu funkcionálu a popište její závislost na T . Interpretujte výsledek.

Příklad F4: Uvažujme úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^T e^{-rt}(1-u)y dt$ za podmínek $y' = 2uy$, $y(0) = 1$, $y(T)$ volné, $0 \leq u \leq 1$.
($T > 0$ a $r \in (0, 1)$ jsou dány.)

- Najděte podezřelé body z maxima. (Nezapomeňte na zdůvodnění, proč v Hamiltoniánu je $\lambda_0 = 1$.) Proveďte diskusi vlastností řešení v závislosti na T a r .
- Jde skutečně o maximum? Zdůvodněte.

Příklad F5: Uvažujme úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^{10} uy$ za podmínek $y' = (1-u)y$, $y(0) = 0$, $y(10)$ volné, $0 \leq u \leq 1$.

- Najděte podezřelé body z maxima. (Nezapomeňte na zdůvodnění, proč v Hamiltoniánu je $\lambda_0 = 1$.) Proveďte diskusi vlastností řešení v závislosti na T a r .
- Jde skutečně o maximum? Zdůvodněte.

Příklad F6: Uvažujme úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^4 10y$ za podmínek $y' = y - u$, $y(0) = 5$, $y(4) \geq 100$, $0 \leq u \leq 2$.

- (a) Najděte podezřelé body z extrému. (Nezapomeňte na zdůvodnění, proč v Hamiltoniánu je $\lambda_0 = 1$.)
- (b) Jde skutečně o maximum? Zdůvodněte.
- (c) Změní se výsledek, budeme-li uvažovat úlohu, v níž je $y(4)$ volné?