1 Stabilita řešení soustav diferenciálních rovnic

Budeme uvažovat rovnici

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)), \tag{1.1}$$

kde $\boldsymbol{f}$ je zobrazení definované na neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$. Soustavy tvaru (1.1) se nazývají **autonomní**.

V dalším budeme předpokládat, že $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(G, \mathbf{R}^n)$, tj. složky $f_1, \dots, f_n$ zobrazení $\boldsymbol{f}$ jsou třídy $\mathcal{C}^1$ na G.

Definice. Řekneme, že $\boldsymbol{a} \in G$ je **stacionární bod rovnice** (1.1), jestliže $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.

Definice. Řekneme, že stacionární bod $\boldsymbol{a} \in G$ rovnice (1.1) je

- **stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (1.1) splňující $\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{a}\| < \delta$ platí:
  (a) definiční obor řešení $\boldsymbol{x}$ obsahuje interval $\langle 0, +\infty)$;
  (b) $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$ pro $t \in \langle 0, +\infty)$;
- **nestabilní**, jestliže není stabilní,
- **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní a navíc existuje $\Delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (1.1) splňující $\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{a}\| < \Delta$ platí $\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}$.

Věta 1.1. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

- *Stacionární bod* o *rovnice* $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$ *je asymptoticky stabilní, právě když* $\Re\lambda < 0$ *pro každé vlastní číslo* λ *matice* $\mathbb{A}$.
- *Stacionární bod* o *rovnice* $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$ *je stabilní, právě když* $\Re\lambda \le 0$ *pro každé vlastní číslo* λ *matice* $\mathbb{A}$ *a pokud* $\Re\lambda = 0$, *pak násobnost* λ *je rovna* $n - h(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$.

Věta 1.2 (Ljapunov)**.** *Nechť* $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(G, \mathbf{R}^n)$ *a* $\boldsymbol{a}$ *je stacionární bod rovnice (1.1). Označme*

$$\mathbb{A} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{i=1..n, j=1..n}.$$

Pak platí:

- *Jestliže každé vlastní číslo matice* $\mathbb{A}$ *má zápornou reálnou část, pak* $\boldsymbol{a}$ *je asymptoticky stabilní bod rovnice (1.1).*
- *Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice* $\mathbb{A}$ *má kladnou reálnou část, pak je* $\boldsymbol{a}$ *nestabilní bod rovnice (1.1).*

2 Úvod do variačního počtu

2.1 Derivování funkcí na vektorových prostorech

Definice. Nechť X je vektorový prostor $F : X \to \mathbf{R}$, $a \in X$, $h \in X$. **Derivací funkce F v bodě a ve směru h** rozumíme

$$\delta F(a,h) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a+th) - F(a)}{t},$$

pokud limita existuje vlastní.

Definice. Nechť X je reálný vektorový prostor, $M \subset X$, $a \in M$ a F je reálná funkce definovaná alespoň na M. Řekneme, že a je **bod minima** (resp. **bod maxima**) funkce F na množině M, jestliže pro každé $x \in M$ platí $F(x) \geq F(a)$ (resp. $F(x) \leq F(a)$).

Konec 2. přednášky, 4. 10. 2018

Věta 2.1. *Nechť X je vektorový prostor, $F : X \to \mathbf{R}$ a $a \in X$. Jestliže má F v bodě a extrém (tj. minimum nebo maximum), pak pro každé $h \in X$ platí, že $\delta F(a,h)$ neexistuje nebo je rovna nule.*

2.2 Derivování integrálu

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. Řekneme, že funkce f je **stejnoměrně spojitá na M**, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in M, ||x-y|| < \delta : \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 2.2. *Nechť $K \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní a $f : K \to \mathbf{R}$ je spojitá na K. Potom f je stejnoměrně spojitá na K.*

Věta 2.3. *Nechť $f\colon (a,b) \times (c,d) \to \mathbf{R}$ je spojitá a $\partial_1 f$ (= parciálni derivace podle první proměnné) je také spojitá na $(a,b) \times (c,d)$. Nechť $\varphi\colon (a,b) \to (c,d)$ je funkce, která má v každém bodě vlastní derivaci. Nechť $x_0 \in (c,d)$. Položme*

$$K(y) = \int_{x_0}^{\varphi(y)} f(y,x)dx \qquad \textit{pro } y \in (a,b).$$

Potom má funkce K v každém bodě intervalu (a,b) vlastní derivaci a platí

$$K'(y) = \int_{x_0}^{\varphi(y)} \partial_1 f(y,x)dx + f(y,\varphi(y))\varphi'(y), \qquad y \in (a,b).$$

2.3 Základní úloha variačního počtu

Formulace základní úlohy variačního počtu (P1).
Dáno: $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $A, Z \in \mathbf{R}$; $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$

Hledáme takové $y \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle)$, $y(0) = A$, $y(T) = Z$, že hodnota

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 2.4 (nutná podmínka pro extrém)**.** *Nechť y je bodem extrému pro (P1). Pak y je řešením rovnice*

$$(ER1) \qquad F_y(t, y, y') = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y, y').$$

Lemma 2.5. *Nechť funkce $\varphi \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle)$ je nezáporná a $\int_0^T \varphi(s)ds = 0$. Pak $\varphi = 0$ na $\langle 0, T\rangle$.*

Lemma 2.6 (základní lemma variačního počtu)**.** *Nechť $a, b \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle)$ a*

$$\int_0^T (a(t)h(t) + b(t)h'(t))dt = 0$$

pro každou funkci $h \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle)$ splňující $h(0) = h(T) = 0$. Pak funkce b má na $\langle 0, T\rangle$ derivaci a platí zde $b' = a$.

Lemma 2.7. *Nechť T a F jsou jako v (P1), $y, u \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle)$. Nechť zobrazení $G : \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle) \to \mathbf{R}$ je definováno takto:*

$$G(u) = \int_0^T F(t, y(t) + u(t), y'(t) + u'(t))dt.$$

Potom

$$\delta G(o, h) = \int_0^T \big(F_y(t, y(t), y'(t)) \cdot h(t) + F_{y'}(t, y(t), y'(t)) \cdot h'(t)\big)dt$$

pro libovolné $h \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle)$.

Konec 4. přednášky, 11. 10. 2018

2.4 Pevný koncový čas a volná koncová hodnota

Formulace úlohy (P2).
Dáno: $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $A \in \mathbf{R}$; $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$

Hledáme takové $y \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle)$, $y(0) = A$, že hodnota

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s)) ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 2.8. *Nechť y je bodem extrému pro (P2). Pak y splňuje*

$$F_y(t, y, y') = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y, y'), \tag{ER1}$$

$$F_{y'}(T, y(T), y'(T)) = 0. \tag{ER2}$$

2.5 Isoperimetrická úloha

Formulace úlohy (P3).
Dáno: $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $A, Z \in \mathbf{R}$; $B \in \mathbf{R}$; $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$

Hledáme takové $y \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle)$ splňující $y(0) = A$, $y(T) = Z$,

$$\int_0^T G(t, y, y') = B,$$

že hodnota

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s)) ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 2.9. *Nechť y je bodem extrému pro (P3). Pak y splňuje buď*

$$G_y(t, y, y') = \frac{d}{dt} G_{y'}(t, y, y'), \tag{I}$$

nebo existuje $\lambda \in \mathbf{R}$, že y splňuje

$$\begin{aligned} F_y(T, y(T), &y'(T)) - \lambda G_y(T, y(T), y'(T)) = \\ &\frac{d}{dt}\big(F_{y'}(t, y, y') - \lambda G_{y'}(t, y, y')\big). \end{aligned} \tag{II}$$

3 Postačující podmínky pro extrém

3.1 Globální extrémy

Definice. Nechť X je vektorový prostor a $V : X \to \mathbf{R}$ je funkcionál. Řekneme, že V je **konkávní** (resp. **konvexní**) na X, jestliže

$$\forall x, y \in X \, \forall t \in \langle 0, 1\rangle : \; V(tx + (1-t)y) \geq tV(x) + (1-t)V(y)$$

(resp.

$$\forall x, y \in X \, \forall t \in \langle 0, 1\rangle : \; V(tx + (1-t)y) \leq tV(x) + (1-t)V(y)).$$

Věta 3.1. *Nechť $V : X \to \mathbf{R}$ je konkávní. Jestliže $\delta V(x, h) = 0$ pro každé $h \in X$, pak V má v x maximum.*

Věta 3.2. *Nechť $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$.*

(K) Nechť pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ je funkce $[y, y'] \mapsto F(t, y, y')$ konkávní.

Pak je funkcionál $V : \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle)) \to \mathbf{R}$ definovaný předpisem

$$V : y \mapsto \int_0^T F(t, y, y')dt$$

konkávní.

Věta 3.3. *Nechť F v (P1) splňuje (K). Pak je (ER1) postačující podmínkou pro maximum.*

3.2 Postačující podmínky pro lokální extrém

Definice. **Normovaným lineárním prostorem** rozumíme dvojici $(X, ||.||)$, kde X je vektorový prostor (nad $\mathbf{R}$) a $||.||$ je **norma na** X, tj. zobrazení $||.|| : X \to \langle 0, +\infty)$ splňující

- $\forall x \in X : ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = o$,
- $\forall x \in X \, \forall \lambda \in \mathbf{R} : \; ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$,
- $\forall x, y \in X : \; ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definice. Nechť $(X, ||.||)$ je normovaný lineární prostor, $f : X \to \mathbf{R}$ a $x_0 \in X$. Řekneme, že f má v bodě x_0

- **lokální maximum**, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, ||x - x_0|| < r : \; f(x) \leq f(x_0);$$

- **ostré lokální maximum**, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, 0 < ||x - x_0|| < r : \; f(x) < f(x_0).$$

Analogicky definujeme **lokální minimum** a **ostré lokální minimum**.

Věta 3.4. *Nechť y řeší (ER1) v úloze (P1). Jestliže je matice*

$$\begin{pmatrix} F_{yy}(t, y(t), y'(t)) & F_{yy'}(t, y(t), y'(t)) \\ F_{yy'}(t, y(t), y'(t)) & F_{y'y'}(t, y(t), y'(t)) \end{pmatrix}$$

negativně definitní pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$, pak y je bodem ostrého lokálního maxima.

4 Teorie optimálního řízení

Definice. Řekneme, že funkce f je **po částech spojitá** na intervalu $\langle 0, T\rangle$, jestliže existuje dělení $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ takové, že $f|_{(t_i, t_{i+1})}$ je spojitá na (t_i, t_{i+1}) pro každé $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ a v krajních bodech existují vlastní limity.

Řekneme, že funkce f je **po částech diferencovatelná** na intervalu $\langle 0, T\rangle$, jestliže existuje dělení $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ takové, že $f|_{(t_i, t_{i+1})}$ má na (t_i, t_{i+1}) vlastní derivaci a v krajních bodech existují příslušné jednostranné vlastní derivace pro každé $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Formulace úlohy (P4)

Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $A \in \mathbf{R}$;
- $F \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $\partial_1 F$, $\partial_2 F$ jsou spojité;
- $f \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ jsou spojité;
- $\mathcal{U}$ je omezený uzavřený interval.

Hledáme y po částech diferencovatelnou na intervalu $\langle 0, T\rangle$ a u po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

- $y(0) = A$,
- $y'(t) = f(t, y(t), u(t))$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ vyjma konečné množiny,
- $u(t) \in \mathcal{U}$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$,
- $\displaystyle\int_0^T F(t, y(t), u(t))dt$ je maximální.

Věta 4.1 (Pontrjaginův princip maxima)**.** *Nechť u je bod maxima v úloze (P4). Pak existuje funkce $t \mapsto \lambda(t)$, že pro $H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$ (tzv. **hamiltonián**) platí:*

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ platí

$$H(t, y(t), u(t), \lambda(t)) \geq H(t, y(t), \tilde{u}, \lambda(t)),$$

*(PM2) $y' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$ (**stavová rovnice**),*

*(PM3) $\lambda' = -\dfrac{\partial H}{\partial y}$ (**pohybová rovnice**),*

*(PM4) $\lambda(T) = 0$ (**podmínka transverzality**).*

4.2 Postačující podmínky

Věta 4.2. *Princip maxima je postačující podmínkou pro extrém v úloze (P4), jestliže*

- *F a f jsou diferencovatelné,*
- *F a f jsou konkávní v (y, u),*
- *buď f je lineární v y a v u nebo $\lambda(t) \geq 0$ pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$.*

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

Formulace úlohy (P4')

Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^n$;
- $F \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T \rangle \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)$;
- $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T \rangle \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$;
- $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m \subset \mathbf{R}$.

Hledáme $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_n]$, kde složky jsou po částech diferencovatelné funkce na intervalu $\langle 0, T \rangle$, a funkci $\boldsymbol{u} = [u_1, \ldots, u_m]$ s po částech spojitými složkami na $\langle 0, T \rangle$ takové, že

- $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$,
- $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t))$ pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny,
- $u_j(t) \in \mathcal{U}_j$ pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$, $j = 1, \ldots, m$,
- $\displaystyle\int_0^T F(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t)) dt$ je maximální.

Věta 4.3 (Pontrjaginův princip maxima pro (P4')). *Nechť vektorová funkce* $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)$ *je bodem maxima v úloze (P4'). Pak existuje vektorová funkce* $\boldsymbol{\lambda} \colon \langle 0, T \rangle \to \mathbf{R}^n$*, že pro hamiltonián*

$$H(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = F(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})$$

platí:

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_m$ platí

$$H(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \geq H(t, \boldsymbol{y}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}(t)),$$

(PM2) $y_i' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i},\ i = 1, \dots, n$ **(stavová rovnice)**,

(PM3) $\lambda_i' = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i},\ i = 1, \dots, n$ **(pohybová rovnice)**,

(PM4) $\lambda_i(T) = 0,\ i = 1, \dots, n$ **(podmínka transverzality)**.