4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

Formulace úlohy (P3')

Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^n$;
- $F \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)$;
- $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$;
- $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m \subset \mathbf{R}$.

Hledáme $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$, kde složky jsou po částech diferencovatelné funkce na intervalu $\langle 0, T\rangle$, a funkci $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)$ s po částech spojitými složkami na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

- $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$,
- $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t))$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ vyjma konečné množiny,
- $u_j(t) \in \mathcal{U}_j$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$, $j = 1, \dots, m$,
- $\displaystyle\int_0^T F(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t))dt$ je maximální.

Věta 3 (Pontrjaginův princip maxima pro úlohu (P3')). Nechť vektorová funkce $\boldsymbol{u}$ je bodem maxima v úloze (P3'). Pak existuje vektorová funkce $\boldsymbol{\lambda} : \langle 0, T\rangle \to \mathbf{R}^n$, že pro hamiltonián

$$H(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = F(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})$$

platí:

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_m$ platí

$$H(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \geq H(t, \boldsymbol{y}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}(t)),$$

(PM2) $y_i' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$ **(stavová rovnice)**,

(PM3) $\lambda_i' = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}$, $i = 1, \dots, n$ **(pohybová rovnice)**,

(PM4) $\lambda_i(T) = 0$, $i = 1, \dots, n$ **(podmínka transverzality)**.